Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado
Facultad de Ciencias Matemáticas
Unidad de Posgrado

"Estudio de la existencia global y decaimiento exponencial para un problema de contacto termo-elástico semilineal"

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura

AUTOR

Luis Guillermo HUAMANLAZO RICCI

ASESOR

Alfonso PÉREZ SALVATIERRA

Lima, Perú

2020

Referencia bibliográfica

Huamanlazo, L. (2020). *Estudio de la existencia global y decaimiento exponencial para un problema de contacto termo-elástico semilineal*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Hoja de metadatos complementarios

Código ORCID del autor	0000-0001-5766-018X
DNI del autor	09197486
Código ORCID del asesor	0000 0001 9944 4020
DNI del asesor	06445739
Grupo de investigación	EN ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES Y APLICACIONES
Agencia financiadora	UNMSM
Ubicación geográfica donde se desarrolló la investigación	LIMA METROPOLITANA. Longitud: O77°1'41.66"; Latitud: S12°2'35.45".
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2015 - 2019
Disciplinas OCDE	Matemáticas puras http://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

VICEDECANATO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

UNIDAD DE POSGRADO

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS DE GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER

Siendo las, ... horas del día miércoles cuatro de marzo del dos mil veinte, en el Laboratorio 5 de la Facultad de Ciencias Matemáticas, el Jurado Evaluador de Tesis Presidido por el Dr. Hugo Efraín Lázaro Manrique e integrado por los siguientes miembros: Mg. Víctor Hilario Tarazona Miranda (Jurado Informante); Mg. Victoriano Yauri Luque (Jurado Informante) y, el Dr. Alfonso Pérez Salvatierra como Miembro Asesor, se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: «ESTUDIO DE LA EXISTENCIA GLOBAL Y DECAIMIENTO EXPONENCIAL PARA UN PROBLEMA DE CONTACTO TERMO-ELÁSTICO SEMILINEAL» presentada por el Bachiller Luis Guillermo Huamanlazo Ricci para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura.

Luego de la exposición del graduando, los Miembros del Jurado hicieron las preguntas correspondientes así como las observaciones e inquietudes acerca del trabajo de tesis, a las cuales el Bachiller Luis Guillermo Huamanlazo Ricci respondió con acierto y solvencia, demostrando pleno conocimiento del tema.

A continuación se realizó la calificación correspondiente, según tabla adjunta, resultando el Bachiller Luis Guillermo Huamanlazo Ricci aprobado con el calificativo de muy bueno (17) diecisiete.....

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del Grado Académico de **Magíster en Matemática Pura** al **Bachiller Luis Guillermo Huamanlazo Ricci**.

Siendo las 13:00...horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta:

Mg. Víctor Hilario Tarazona Miranda
MIEMBRO

Dr. Hugo Efraín Lázaro Manrique
PRESIDENTE

Mg. Victoriano Yauri Luque
MIEMBRO

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
MIEMBRO ASESOR

DEDICATORIA

A Dios pues él me bendice
y me ayuda siempre

A la memoria de mis padres
Dionicio y Guillermina

A mi esposa Linda y mis hijos:
Dionicio y Diego

AGRADECIMIENTOS

A mi asesor de tesis el Doctor Alfonso Pérez Salvatierra, por la acertada orientación, sugerencias, ayuda y discusión crítica que me permitió un buen aprovechamiento para la realización de esta tesis, por su apoyo y amistad que me permitieron aprender más.

Al Doctor Eugenio Cabanillas Lapa por sus consejos, atenta disponibilidad y generosidad.

A los profesores y amigos de la facultad que me enseñaron tanto de lo académico como de la vida, impulsándome siempre a seguir adelante.

A mi esposa Linda y mis hijos: Dionicio y Diego quienes han estado a mi lado apoyándome y ayudándome todo este tiempo.

A mi hermano: Jesús, su esposa: Filomena y sus hijos: Luis, Juan, Roxana y Cristian, por lo compartido.

A Dios por tenerlo presente, a mis padres: Dionicio y Guillermina sé que este momento hubiera sido tan especial para ellos como lo es para mí (eterno agradecimiento).

RESUMEN

Estudio de la Existencia Global y Decaimiento Exponencial para un Problema de Contacto Termo-elástico Semilineal.

Estudiaremos la existencia de solución y la estabilidad asintótica, es decir, el decaimiento exponencial de la energía asociada al sistema de contacto termo-elástico semilineal dado por:

$$u_{tt} - \eta u_{xx} + m\theta_x + N_1(u,\theta) = f(x) \quad \text{en} \quad (0,1)\times(0,T)$$

$$\theta_t - k\theta_{xx} + m u_{xt} + N_2(u,\theta) = g(x) \quad \text{en} \quad (0,1)\times(0,T)$$

Condiciones iniciales

$$u(x,0) = u_0(x)\,,\ \ u_t(x,0) = u_1(x)\,,\ \ \theta(x,0) = \theta_0(x)$$

Condiciones de frontera

$$\eta u_x(1,t) - m\theta(1,t) = -d[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu} - b[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\ell}\, u_t(1,t)$$

$$k\theta_x(1,t) = -\beta\theta(1,t)$$

$$u(0,t) = 0\,,\ \ \theta_x(0,t) = 0$$

Donde η, m, k, d, b, β son constantes positivas, $\mu \geq 1$, $\ell \geq 0$, y por simplicidad, asumiremos que f y g son funciones dependiendo de x.

Los términos no lineales $N_1(u,\theta)$ y $N_2(u,\theta)$ cumplen:

$$N_1(u,\theta) = N_{11}(u) + N_{12}(\theta)$$

$$N_{11} \in C^1(\mathbb{R})\,,\ N_{12} \in C_b^1(\mathbb{R})\,,\ N_{11}(u)u \geq 0\,,\ 0 \leq N_{12}'(\theta) \leq M_1\,,\ N_{12}(0) = 0$$

$$N_2(u,\theta) = N_{21}(u) + N_{22}(\theta)\,, \quad N_{21}(u) \in C^{0,1}(\mathbb{R})\,,\ N_{22}(\theta) \in C_b^1(\mathbb{R})\,,\ N_{22}'(\theta) \geq 0$$

$$|N_{11}(u)| \leq M_0|u|\,, \qquad N_{11}(u)u \geq \nu\int_0^u N_{11}(s)ds \ \ (\nu > 0 \ \ es\ una\ constante)$$

$$|N_{21}(u)| \leq M_2|u|\,,\ |N_{22}(\theta)| \leq M_3|\theta|$$

ABSTRACT

Study of Global Existence and Exponential Decay for a Semilinear Thermo-elastic Contact Problem

We will study the existence of a solution and asymptotic stability, that is, the exponential decay of energy associated with the semilinear thermo-elastic contac system given by:

$$
\left\| \begin{array}{l}
u_{tt} - \eta u_{xx} + m\theta_x + N_1(u,\theta) = f(x) \quad \text{en} \quad (0,1) \times (0,T) \\
\theta_t - k\theta_{xx} + m u_{xt} + N_2(u,\theta) = g(x) \quad \text{en} \quad (0,1) \times (0,T) \\
\qquad \text{Initial conditions} \\
u(x,0) = u_0(x)\,, \;\; u_t(x,0) = u_1(x)\,, \;\; \theta(x,0) = \theta_0(x) \\
\qquad \text{Boundary conditions} \\
\eta u_x(1,t) - m\theta(1,t) = -d[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu} - b[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\ell}\, u_t(1,t) \\
k\theta_x(1,t) = -\beta\theta(1,t) \\
u(0,t) = 0\,, \;\; \theta_x(0,t) = 0
\end{array} \right.
$$

Where η, m, k, d, b, β they are positive constants, $\mu \geq 1$, $\ell \geq 0$, and for simplicity, we will assume that f and g are functions depending on x.

Non-linear terms $N_1(u,\theta)$ and $N_2(u,\theta)$ meet:

$$N_1(u,\theta) = N_{11}(u) + N_{12}(\theta)$$

$$N_{11} \in C^1(\mathbb{R})\,,\; N_{12} \in C_b^1(\mathbb{R})\,,\; N_{11}(u)u \geq 0\,, 0 \leq N_{12}'(\theta) \leq M_1\,,\; N_{12}(0) = 0$$

$$N_2(u,\theta) = N_{21}(u) + N_{22}(\theta)\,, \quad N_{21}(u) \in C^{0,1}(\mathbb{R})\,,\; N_{22}(\theta) \in C_b^1(\mathbb{R})\,,\; N_{22}'(\theta) \geq 0$$

$$|N_{11}(u)| \leq M_0|u|\,, \qquad N_{11}(u)u \geq \nu \int_0^u N_{11}(s)ds \;\; (\nu > 0 \;\; es\ una\ constante)$$

$$|N_{21}(u)| \leq M_2|u|\,,\; |N_{22}(\theta)| \leq M_3|\theta|$$

Índice general

Introducción

El problema termo elástico se vienen estudiando hace mucho tiempo desde 1968. Primeramente deducir el fenómeno físico termo elástico para luego estudiar la existencia y la estabilidad asintótica de soluciones para el problema termo elástico lineal: Carlson D.E.[10], Dafermos C.M.[11], Dassios G. et Al [12]. Estos mismos problemas se comienzan a estudiar con amortiguamiento local, los pioneros de estos estudios son Nakao [33], en 1966 y Zuazua [46], en 1990, quien estudia la ecuación de la onda semilineal con amortiguamiento local, Muñoz E. et Al en 2013, quienes estudiaron soluciones para una mezcla Termoelástico unidimensional.

Posteriormente se han estudiado los problemas de contacto en termo elásticos, visco elásticos, termoviscoelásticas, desde el año 1990 hasta nuestros días como podemos ver en los artículos de: Portillo H. [36], Figueiredo et Al [17], Muñoz et Al [32], Gilbert R.P. et Al [19], Copeti M.I. et Al [8]; inclusive problemas como la de transmisión, con memoria en la frontera de esta manera mejorando cada vez más el fenómeno físico, termo elásticos, termoviscoelásticas, lineales y semilineales.

Problemas que implican el contacto termo elástico surgen de manera natural en muchas situaciones ver Carlson D.E. [10] y Day W.A. [13] En particular, las que implican procesos industriales cuando dos o más materiales pueden entrar en contacto o pueden perder contacto como resultado de la expansión o contracción termo elástica. Tal fenómeno termo elástico se puede dividir en tres partes: estático, casi estático y completamente dinámico.

Los casos casi-estáticos y estáticos con diversas condiciones de contorno han sido ampliamente estudiados por: Carlson [10], Copeti et Al [8]y Shi P. et Al [43]; tanto numérica como teóricamente, la existencia de la solución y la estabilidad.

Estos artículos contienen una variedad de condiciones de contorno lineal y no lineal, pero en cada caso el problema envuelve tanto una simple temperatura y un simple desplazamiento, de modo que la reformulación conduce a una ecuación no lineal para una sola temperatura.

Por el contrario, los problemas completamente dinámicos son diferentes al del caso casi-estático. El sistema casi-estático se puede ver como de un tipo mixto, esto es elíptico-parabólico, mientras que el caso dinámico es del tipo hiperbólico-parabólico. Este último caso es más complicado, hay pocos resultados que se refieren solamente a la existencia. Los autores Elliot C.M. [16] y Muñoz J.E. et Al [32], consideran las ecuaciones lineales con condiciones de contacto (condiciones Signorin de contacto).

En el presente trabajo desarrollaremos en forma didáctica y explicita la existencia de solución y la estabilidad asintótica, es decir el decaimiento exponencial de la energía asociada al problema de contacto termoelastico semilineal, siguiendo el artículo de Gao Hongjun & Jaime Muñoz. [21] (2000), modelado por el sistema siguiente:

$$u_{tt} - \eta u_{xx} + m\theta_x + N_1(u,\theta) = f(x) \quad \text{en} \quad (0,1)\times(0,T) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\theta_t - k\theta_{xx} + mu_{xt} + N_2(u,\theta) = g(x) \quad \text{en} \quad (0,1)\times(0,T) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Condiciones iniciales

$$u(x,0) = u_0(x)\,,\;\; u_t(x,0) = u_1(x)\,,\;\; \theta(x,0) = \theta_0(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Condiciones de frontera

$$\eta u_x(1,t) - m\theta(1,t) = -d[(u(1,t)-\alpha)^+]^\mu - b[(u(1,t)-\alpha)^+]^\ell\, u_t(1,t) \;\ldots\ldots \quad (4)$$

$$k\theta_x(1,t) = -\beta\theta(1,t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$u(0,t) = 0\,,\;\; \theta_x(0,t) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Donde η, m, k, d, b, β son constantes positivas, $\mu \geq 1$, $\ell \geq 0$, y por simplicidad, asumiremos que f y g son funciones dependiendo de x.

Los términos no lineales $N_1(u,\theta)$ y $N_2(u,\theta)$ cumplen:

$$N_1(u,\theta) = N_{11}(u) + N_{12}(\theta)$$

$$N_{11} \in C^1(\mathbb{R})\,,\; N_{12} \in C_b^1(\mathbb{R})\,,\; N_{11}(u)u \geq 0\,,\; 0 \leq N_{12}'(\theta) \leq M_1\,,\; N_{12}(0) = 0 \ldots\ldots (7)$$

$$N_2(u,\theta) = N_{21}(u) + N_{22}(\theta),\; N_{21}(u) \in C^{0,1}(\mathbb{R}),\; N_{22}(\theta) \in C_b^1(\mathbb{R}),\; N_{22}'(\theta) \geq 0 \ldots (8)$$

$$|N_{11}(u)| \leq M_0|u|\,, \quad N_{11}(u)u \geq \nu \int_0^u N_{11}(s)ds \;\; (\nu > 0 \;\; es\; una\; constante) \;\ldots\ldots (9)$$

$$|N_{21}(u)| \leq M_2|u|\,,\; |N_{22}(\theta)| \leq M_3|\theta| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

En este trabajo, vamos a demostrar la existencia de soluciones débiles para el problema

(1) – (6), en las condiciones (7) y (8).

El modelo determina pequeña deformación longitudinal a lo largo del eje x de una varilla termo elástica semilineal unidimensional, cuando el cuerpo se fija en x = 0 y se restringe unilateralmente en x = 1. Suponemos que la expansión y la contracción se deben a efectos térmicos y fuerzas corporales. Los problemas relacionados con el contacto termo elástica surgen naturalmente en muchas situaciones ver Elliot et Al [16], Dafermos C.M. [11] Particularmente, aquellos que involucran procesos industriales cuando dos o más materiales pueden entrar en contacto o pueden perder el contacto como resultado de la expansión o contracción termo elástica. Tal fenómeno termo elástica se puede dividir en tres partes: estática, cuasi estática y dinámica completa.

Los casos cuasi estáticos y estáticos con diversas condiciones de contorno se han estudiado ampliamente en Elliot.C. M. [16], Carlson D.E. [10], Dafermos C.M. [11], Portillo H. [36], Lions J.L. [24], Nakao [33] entre otros, tanto numérica como teóricamente. Se establecen varios tipos de existencia de solución e unicidad, como también la estabilidad de la energía. Estos artículos contienen una variedad de condiciones de contornos lineales y no lineales, pero en cada caso el problema involucra una sola temperatura y un solo desplazamiento, de modo que la reformulación conduce a una ecuación no lineal para una sola temperatura.

Por el contrario, el problema completamente dinámico es diferente del caso cuasi estático. El sistema cuasi estático puede verse como un tipo mixto elíptico-parabólico, mientras que el caso dinámico es un tipo mixto hiperbólico-parabólico. Este último caso es más complicado. Hay pocos resultados que solo conciernen a la existencia. En el artículo de Dassios G. [12], el autor considera restricción unilateralmente en x = 1, (problema de contacto de Signorin), aquí solo se obtuvo la existencia de una solución débil; mientras que en el artículo de Muñoz J. et Al [32], los autores estudian las ecuaciones lineales de dos barras con las condiciones de contacto (contacto de Signorin), obtienen la existencia e unicidad de solución y el decaimiento exponencial de la solución débil.

En el presente trabajo estudiamos la deformación longitudinal pequeña a lo largo del eje X, de una barra termo elástica unidimensional semilineal representada por la función $u(x,t)$ fijado en el extremo $x=0$, con una fricción en el otro extremo por un obstáculo fijo, con posibilidad que exista una penetración en el obstáculo fijo, ver figura 1. Supongamos que la expansión y contracción se deben a los efectos térmicos y a las fuerzas del cuerpo. Estos efectos térmicos son representados por la función $\theta(x,t)$, que denota la diferencia de temperatura entre el actual estado y una temperatura referencial. Nuestro interés en el presente estudio no es la deducción de la ecuación, puesto que, ya fueron estudiados por los autores: Dafermos C.M., Dassios G. et Al, Hansen S.W., entre otros.

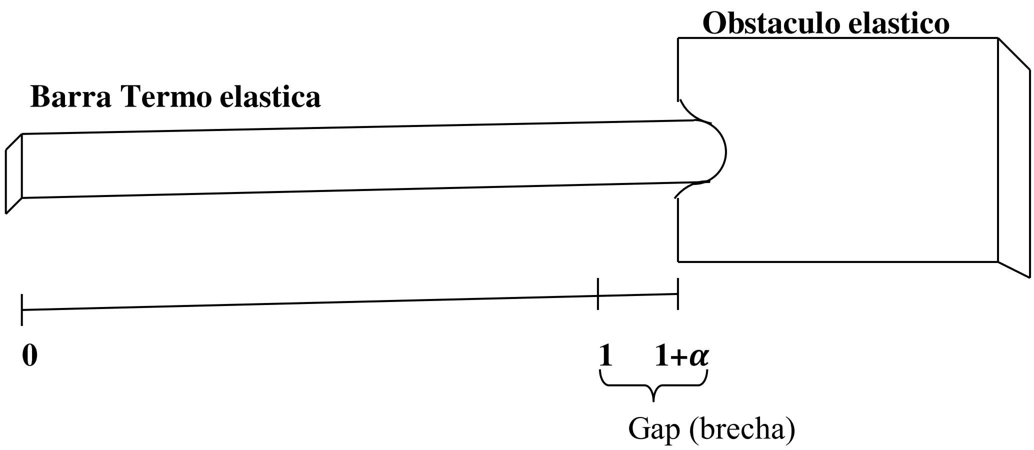


Fig. 1

El presente trabajo está estructurado en cuatro capítulos de la siguiente manera:

En el primer capítulo, daremos algunas definiciones de espacios que utilizaremos en el desarrollo del trabajo y también resultados a utilizar con sus respectivas referencias para su consulta.

En el segundo capítulo, se estudiará la existencia de solución fuerte con las hipótesis (7)-(8), usando técnicas de la energía y usando la dependencia continua de las soluciones fuertes. La existencia global es habitual (por el método estándar de Faedo-Galerkin [24], referirnos a [32]).

En el tercer capítulo, se estudia la solución débil del sistema (1)-(6) con las hipótesis (7)-(8), usando el método de la monotonicidad, método de la compacidad y algunas otras técnicas;

Finalmente en el Cuarto capítulo, se estudia el decaimiento exponencial de la solución débil del sistema planteado con todas sus hipótesis.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En este capítulo estableceremos varios de los resultados que son utilizados en el capítulo siguiente. En determinados casos se proporcionarán ideas de las demostraciones y en otras se señalaran en forma precisa las referencias para que la persona con interés pueda mirar más detalles.

1.1 FUNCIONES DE PRUEBA

1.1.1 Notaciones de Derivadas Parciales

Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los enteros no negativos. Si $m \in \mathbb{Z}^+$, a los componentes de $\mathbb{N}^m$ se les nombrará multi-ìndices, así para

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$ y $x = (x_1, x, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, se definen:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ \dots + \alpha_m$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} + x_2^{\alpha_2} + \cdots + x_m^{\alpha_m}$$

$$\alpha! = \alpha_1!.\alpha_2!.\dots\alpha_m!.$$

El operador de Derivación de orden α, denotado por D^α, es definido:

$$D^\alpha u = \begin{cases} \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1}.\partial x_2^{\alpha_2}\dots.\partial x_m^{\alpha_m}} & \alpha \neq (0,0,\dots,0) \\ u & \alpha = (0,0,\dots,0) \end{cases}$$

Ahora si el multi-indice es de la forma $\alpha = (0, \dots, 0, i, 0 \dots, 0) \in \mathbb{N}^m$, el operador derivación D^α es caracterizado por la siguientes notaciones

$$D^i = D_i = \partial x_i = (.)_{x_i}\ , \ \ i = 1,2, \dots, m$$

1.1.2 Soporte de una función

Sea $\Omega \in \mathbb{R}^m$ conjunto abierto, $u: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ función continua en Ω. Llamamos "soporte de u" a la clausura en Ω del conjunto de puntos en Ω donde u no se anula. Es decir

$$Sop(u) = \overline{\{x \in \Omega\, ;\, u(x) \neq 0\}}^{\Omega}$$

Llamado conjunto soporte de u.

1.1.3 Función de Prueba

Sea $\Omega \in \mathbb{R}^m$ conjunto abierto, la función $u: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, es llamada "función de prueba" en Ω si u es de clase C^∞ en Ω y el soporte de u es un compacto contenido en Ω . Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ al "conjunto de las funciones de prueba en Ω".

Se pueden observar algunos ejemplos en [27](Medeiros & Milla, 2000, pág. 5) que probarían que $C_0^\infty(\Omega) \neq \emptyset$. En términos de conjuntos,

$C(\Omega) = \{u: \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ u\ \ es\ continua\ \}$

$C^k(\Omega) = \{u: \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ u\ \ es\ k-veces\ continuamente\ diferenciable\}$

$C^\infty(\Omega) = \{u: \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ u\ \ es\ infinitamente\ continua\ diferenciable\}$

$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega); sop(u) \subset \Omega \text{ es compacto}\}$

1.1.4 El Espacio $\mathcal{D}(\Omega)$

Dando una topología τ llamada "topología limite inductiva" al conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ observar [44](Solis, 2016) y [22](Kesavan, 1989), diremos que una sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para 0 si y solamente si, existe un subconjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que:

a) $sop(\varphi_n) \subset K,\ \forall n \in \mathbb{N}$

b) $D^\alpha \varphi_n \longrightarrow 0$ uniformemente sobre $K,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^m$

Diremos que una sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, cuando la sucesión $(\varphi_n - \varphi)$ converge para cero en el sentido dado arriba.

Denotaremos por $\mathcal{D}(\Omega)$, al espacio $C_0^\infty(\Omega)$ con la noción de convergencia definida, y lo llamaremos "el espacio de las funciones de prueba o test".

Es decir: $\mathcal{D}(\Omega) \equiv (C_0^\infty(\Omega), \longrightarrow)$

1.2 DISTRIBUCIONES SOBRE Ω

Definición 1.1

Distribución sobre Ω es toda forma lineal $T\colon \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ el cual es continua sobre $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definición 1.2

T es forma lineal:

$T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$

T es continua sobre $\mathcal{D}(\Omega)$:

si para toda sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$, tal que $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$, cuando $n \longrightarrow \infty$, se tiene que $\big(T(\varphi_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow T(\varphi)$ en $\mathbb{R}$

Nota 1.1: $\langle T, \varphi_n \rangle$ es el valor de T en φ_n

Definición 1.3

"El conjunto de todas las distribuciones sobre Ω es un espacio vectorial el cual se representa por $\mathcal{D}'(\Omega)$. En este espacio se dice que una sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vectores de $\mathcal{D}'(\Omega)$ convergen para cero en $\mathcal{D}'(\Omega)$, cuando para toda función test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la sucesión $(\langle T_n, \varphi\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para cero en $\mathbb{K}$ (Note que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)". En este caso se escribe

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} T_n = 0 \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Se dice que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} T_n = T$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, cuando $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (T_n - T) = 0$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definición 1.4

Dada $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{N}^m$ un multiındice, se define $D^\alpha T$ la derivada distribucional de orden α de T, como el elemento de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dado por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Teorema 1.1

El operador $D^\alpha T$ también es una distribución

Demostración. Observar [9](Costa Marques, 2018, pág. 48).

Antes de presentar los espacios de Sobolev, destacamos dos hechos interesantes:

i) La aplicación

$$D^{\alpha}: \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$
$$T \quad \mapsto \quad D^{\alpha}T$$

Es lineal y continuo en el sentido de la convergencia definida en $\mathcal{D}'(\Omega)$, esto es:
$T_n \longrightarrow T$ en $\mathcal{D}'(\Omega) \Longrightarrow D^{\alpha}T_n \longrightarrow D^{\alpha}T$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

ii) La derivada de una distribución localmente integrable puede no ser localmente integrable. Esto motivará el concepto para Espacios de Sobolev.

Ejemplo:

Sea u la función de Heaviside definida en $\mathbb{R}$ del siguiente modo:

$$u(x) = \begin{cases} 1, & si\, x \geq 0 \\ \\ 0, & si\, x < 0 \end{cases}$$

Esta función es localmente integrable en $\mathbb{R}$, sin embargo su derivada no lo es. En efecto:

$$\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Por lo tanto, $u' = \delta_0 \notin L^1_{Loc}(\mathbb{R})$.

La función Heaviside, aunque derivable en el sentido de Sobolev, la derivada u' no es derivable en el mismo sentido, ya que $u' = \delta_0$ no es integrable localmente. Sin embargo, de la definición (1.4) se deduce que cada distribución $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ posee derivadas de todas las órdenes en el sentido de las distribuciones.

1.3 ESPACIO $L^1_{Loc}(\Omega)$

Denotaremos con $L^1_{Loc}(\Omega)$ al espacio vectorial de las (clases de) funciones $u: \Omega \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que la restricción de u a cualquier compacto $K \subset \Omega$ es integrable (en el sentido de Lebesgue) en K.

Simbólicamente tenemos

$$L^1_{Loc}(\Omega) = \left\{ u: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{medible};\ \int_K |u(x)|dx < +\infty,\ \forall compacto\ K \subset \Omega \right\}$$

Para $1 < p < \infty$, se define

$$L^p_{Loc}(\Omega) = \left\{ u: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{medible};\ \int_K |u(x)|^p dx < +\infty,\ \forall compacto\ K \subset \Omega \right\}$$

Nota 1.2: $L^p_{Loc}(\Omega)$ es denominado el espacio de las funciones localmente integrables

Se tiene los siguientes resultados:

Para $1 \leq p < \infty$: $L^p_{Loc}(\Omega) \subset L^1_{Loc}(\Omega)$ y en particular $L^p(\Omega) \subset L^1_{Loc}(\Omega)$

“Por lo tanto, $L^1_{Loc}(\Omega)$ es uno de los mayores espacios de funciones del análisis”.

Lema 1.1 (Du Bois Reymond)

“Sea $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ satisfaciendo $\int_\Omega u(x)\varphi(x) = 0 \ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Entonces $u(x) = 0$ c.t.p. en Ω”

Demostración. Observar [1](Adams & Fournier, 2003, pág. 74)

Definición 1.5 (Convolucion de funciones)

Sea $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Llamaremos convolucion de u en φ a la función $u * \varphi$ definida en Ω por

$$(u * \varphi)(x) = \int_\Omega u(x-y).\varphi(y)dy = \int_\Omega u(y).\varphi(x-y)dy$$

1.4 ESPACIOS $L^p(\Omega)$

Los **e**spacios L^p son los espacios vectoriales normados más importantes en el contexto de la teoría de la medida y de la integral de Lebesgue. Reciben también el nombre de espacios de Lebesgue por el matemático Henri Lebesgue.

Técnicamente, L^p consiste en clases de equivalencia de funciones que son iguales en casi todas partes; pero normalmente no nos referiremos a este asunto explícitamente, observar [38](Sattinger, 2004, pág. 55) y [5](Blasco De la Cruz, 2014, pág. 30).

Sea un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ provisto de la medida de Lebesgue

$$L^p(\Omega) := \{u: \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ u\ medible\ Lebesgue\ ;\ \ \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}.$$

Donde:

$$\|u\|_p = \|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{1/p} \ \text{si} \ \ 1 \leq p < \infty.$$

Si $p = \infty$, se considera

$$L^\infty(\Omega) := \{u: \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ u\ medible\ Lebesgue\ ;\ \ |u(x)| \leq M\ c.t.p.en\ \Omega\}.$$

Donde:

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \sup ess\ u \equiv inf\{M > 0; |u(x)| < M\ \ c.t.p.en\ \ \Omega\}.$$

Teorema 1.2 El espacio $(L^1(\Omega), \|.\|_1)$ es un espacio de Banach

Demostración. Observar [5](Blasco De la Cruz, 2014, pág. 30)

Teorema 1.3 El espacio $\left(L^p(\Omega), \|.\|_p\right)$ es un espacio normado si $1 < p < \infty$.

Demostración. Observar [5](Blasco De la Cruz, 2014, pág. 32)

Lema 1.2 Si $a, b \notin \mathbb{R}^-$ entonces se tiene que

$$a^{1/p}.b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q} \; ; \qquad 1 < p, q < \infty$$

Demostración. Observar [15](Echandia Liendo & Finol, 2002)

Nota 1.3: $1 < p < \infty$; se denota por p' el exponente conjugado de p, es decir

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Que también satisface $1 < p' < \infty$.

Teorema 1.4 (Desigualdad de Holder)

Sean $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^{p'}(\Omega)$ donde $1 < p < \infty$, entonces $u.v \in L^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}$$

La igualdad se cumple si y solo si $|u(x)|^p$ y $|v(x)|^{p'}$ son proporcionales c.t.p. en Ω

Demostración. Observar [1](Adams & Fournier, 2003)

Teorema 1.5 (Desigualdad de Minkowski)

Si $1 \leq p < \infty$, entonces $\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$

Demostración. Observar [1](Adams & Fournier, 2003)

Teorema 1.6

$L^p(\Omega)$ espacio de Banach $\forall\, 1 \leq p \leq \infty$

Demostración. Observar [6](Bresìz, 1984, pág. 57)

Corolario 1.1

$C_0^\infty(\Omega)$ denso en $L_p(\Omega)$ $\forall\, 1 \leq p \leq \infty$

Demostración. Observar [27](Medeiros & Milla, 2000)

Teorema 1.7

$L^p(\Omega)$ espacio Reflexivo $\forall\, 1 < p < \infty$

Demostración. Observar [6](Bresìz, 1984, pág. 59)

Teorema 1.8

$L^p(\Omega)$ espacio separable $\forall\, 1 \leq p < \infty$

Demostración. Observar [6](Bresìz, 1984, pág. 62)

Teorema 1.9 (de Representación de Riesz para $L^p(\Omega)$)

Sean $1 < p < \infty$ y $\mathcal{L} \in [L^p(\Omega)]'$. Entonces existe $w \in L^{p'}(\Omega)$ tal que $\forall u \in L^p(\Omega)$

$$\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}_w(u) = \int_{\Omega} u(x)w(x)dx.$$

Además $\|w\|_{p'} = \|\mathcal{L}; [L^p(\Omega)]'\|$. Asi $[L^p(\Omega)]' \cong L^{p'}(\Omega)$; $[L^p(\Omega)]'$ es isométricamente isomorfo a $L^{p'}(\Omega)$.

Demostración. Observar [1](Adams & Fournier, 2003, pág. 47)

Teorema 1.10 (de Representación de Riesz para $L^1(\Omega)$)

Sea $\mathcal{L} \in [L^1(\Omega)]'$. Entonces existe $w \in L^{\infty}(\Omega)$ tal que $\forall u \in L^1(\Omega)$

$$\mathcal{L}(u) = \int_{\Omega} u(x)w(x)dx.$$

y $\|w\|_{\infty} = \|\mathcal{L}; [L^1(\Omega)]'\|$. Asi $[L^1(\Omega)]' \cong L^{\infty}(\Omega)$; $[L^p(\Omega)]'$

Demostración. Observar [1](Adams & Fournier, 2003, pág. 47)

Definición 1.6

Sean X e Y espacios de Banach, con $X \subset Y$. Sea $i : X \to Y$ una inyección canónica, de X en Y, que a cada elemento $x \in X$ hacemos corresponder $i(x) = x$ como un elemento de Y. Decimos que la inmersion es contínua cuando existe una constante $C > 0$, tal que

$$\|x\|_X \leq C\|x\|_Y, \forall x \in X.$$

Donde $\|.\|_X$ e $\|.\|_Y$ denotan las normas de X e Y, respectivamente.

"Decimos que la inmersión es compacta cuando la imagen de subespacios limitados de X por i son relativamente compactos en Y".

"Denotamos las inmersiones continuas y compactas de X en Y, respectivamente, por

$$X \hookrightarrow Y \quad e \quad X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$$

Sabiendo esto, vale:

Sea Ω es limitado y $1 \leq p \leq q \leq \infty$ entonces

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)".$$

1.5 ESPACIO DE SOBOLEV

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un abierto. Si $u \in L^p\ (\Omega)$, con $1 \leq p \leq \infty$. Vimos que $D^\alpha u$ no es, en general, una distribución definida por una función de $L^p\ (\Omega)$. Cuando $D^\alpha u$ es definida por una función de $L^p\ (\Omega)$, se define un nuevo espacio denominado espacio de Sobolev.

Definición 1.7

Se representa por $W^{m,p}(\Omega)$ el espacio vectorial de todas las funciones $u \in L^p\ (\Omega)$ tales que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertenece a $L^p\ (\Omega)$, es decir:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{\, u \in L^p\ (\Omega);\ \ D^\alpha u \in L^p\ (\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}$$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ definimos la norma de u por:

$$\|u\|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx\ , \quad si\ \ 1 \leq p < \infty$$

y

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u(x)|_{\infty,\Omega}\ , \quad si\ \ p = \infty$$

Teorema 1.11 $\|u\|_{m,p}$ es una norma del espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Demostración. Observar [4](Blanco Gamarra & Rojas Milla, 2014, pág. 78)

Proposición 1.1

El espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Observar [28](Medeiros & Rivera, 1975, pág. 20)

Observación 1.1 Si $p = 2$, los espacios son denotados por $H^m(\Omega)$, es decir $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\ D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}$ en el sentido distribucional $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Y para $u \in H^m(\Omega)$, designamos por $\|u\|_{m,p}^p = \|u\|_{m,2}^2$. También tiene un producto interno natural:

$$\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)}$$

Así $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\ Du \in L^2(\Omega),\ en\, \mathcal{D}'(\Omega)\}$

$H^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\ D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq 2\ \ en\, \mathcal{D}'(\Omega)\}$

La estructura bilineal

$$\big((u, v)\big) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)$$

Determina un producto interno en $H_0^1(\Omega)$ e infiere una norma

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \big((u, u)\big) = (\nabla u, \nabla u)_{L^2(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\nabla u\|^2.$$

En $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ definimos la estructura bilineal

$$(.)_\Delta = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Por medio de

$$(u, v)_\Delta = \int_\Omega \Delta u \Delta v = (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} = (\Delta u, \Delta v)$$

Que concluye ser un producto interno y la norma determinada es:

$$\|u\|_\Delta^2 = (\Delta u, \Delta u)_{L^2(\Omega)} = (\Delta u, \Delta u) = \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\Delta u\|^2.$$

Observación 1.2 $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert por lo propio que $L^2(\Omega)$ lo es.

Teorema 1.12

Si $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de de Banach separable para $1 \leq p < \infty$ y si $1 < p < \infty$ entonces $W^{m,p}(\Omega)$ es reflexivo y uniformemente convexo.

Demostración. Observar [34](Ochoa, 2010, pág. 31)

Proposición 1.2. (Fórmula de Green)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado bien regular. Sean $u, w \in H^1(\Omega)$, entonces para cada $1 \leq i < n$, se cumple:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i} dx = -\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} w dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x_i} w \mathcal{V}_i d\Gamma$$

En el cual $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots . \mathcal{V}_n)$ expresa el vector normal unitario exterior de Γ.

Si $u \in H^{\mathbf{2}}(\Omega)$ y $w \in H^1(\Omega)$, se cumple:

$$\int_{\Omega} \nabla u . \nabla w dx = \int_{\Omega} (-\Delta u)\, w dx + \int_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial \mathcal{V}} d\Gamma$$

En el cual $\frac{\partial u}{\partial \mathcal{V}}$ es la derivada direccional en la dirección del vector u.

Demostración. Observar [22]Kesavan.

1.6 ESPACIO $W_0^{m,p}(\Omega)$

Definición 1.8

$W_0^{m,p}(\Omega) \equiv$ la clausura de $\mathcal{D}(\Omega)$ con la norma de $W^{m,p}(\Omega)$, es decir

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|u\|_{m,p}}$$

Observación 1.3 i) Para $p = 2$, se considera:

$$H_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|u\|_m} = W_0^{m,2}(\Omega)$$

ii) Por $H^{-m}(\Omega)$ denotamos el dual topológico de $H_0^m(\Omega)$, es decir:

$$H^{-m}(\Omega) = \{\mathcal{L}: H_0^m(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R};\ \mathcal{L} \text{ es lineal y continua}\}$$

Por lo tanto $H^{-m}(\Omega) = [H_0^m(\Omega)]'$

Cuando $m = 1$ entonces:

$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|u\|_1}$ a Ω en la situación dada se prueba que:

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); u\, /_{\Gamma=\partial\Omega} = 0\}$$

$$H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega); u\, /_{\Gamma=\partial\Omega} = 0\}$$

Cuando $\Omega = \mathbb{R}^n \Longrightarrow H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|u\|_1} = H^1(\Omega)$

iii) Contamos con la consecuente cadena de inyecciones continuas y densas

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \cong \left(L^2(\Omega)\right)' \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

Teorema 1.13 Si $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$, el complemento de Ω en $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ / Ω) tiene medida de Lebesgue cero.

Demostración. Observar [27](Medeiros & Milla, 2000, pág. 26)

Teorema 1.14 Si $1 \leq p < \infty$ y para algún $m \in \mathbb{Z}_0^+$ implica $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$

Demostración. Observar [4](Blanco Gamarra & Rojas Milla, 2014, pág. 81)

Observación 1.4 La cerradura de C_0^∞ correspondiente a la norma de $W^{1,p}(\Omega)$ que posee trazo nulo, es decir:

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{v \in W^{1,p}(\Omega); v(x) = 0, x \in \partial(\Omega)\}$$

1.7 LAS INMERSIONES DE SOBOLEV

Las inmersiones de Sobolev constituyen algunas desigualdades muy valiosas

Teorema 1.15 (desigualdad de Sobolev)

Sea $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < n$, entonces $u \in L^{p^*}$, donde $p^* = \frac{np}{n-p}$, inclusive existe una cte. $C > 0$ tal que:

$$\|\boldsymbol{v}\|_{p^*} \leq C\|\nabla v\|_p$$

Demostración. Observar [37](Ramos Castillo, 2018, pág. 46)

Corolario 1.2

Para $1 \leq p < \infty$, la subsiguiente inmersión

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^r(\mathbb{R}^n), \quad \forall r \in [p, p^*]$$

Es continua.

Demostración. Observación [35](Ortiz Chata, 2017, pág. 27)

Corolario 1.3 Dada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces $v \in L^r(\Omega)$ $\forall r \in [p, p^*]$ y hay un $C = C(p, n) > 0$ de esta manera

$$\|v\|_{p^*} \leq C\|\nabla v\|_p$$

$$\|v\|_r \leq C\|\nabla v\|_p$$

$\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. Observar [35](Ortiz Chata, 2017, pág. 28)

Nota 1.4: "El corolario anterior implica que $W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow v \in L^r(\Omega)$ para $r \in [p, p^*]$ es una inmersión continua, denominada inmersión continua de Sobolev".

Teorema 1.16

Sea $m \in \mathbb{Z}^+ \, y \quad 1 \leq q < \infty$. Luego

1) Si $q < \frac{n}{m}$, $y \ \frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{m}{n}$ implica $W^{m,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$

2) Si $q = \frac{n}{m}$, implica $W^{m,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n), \quad \forall p \in [q, \infty[$

3) Si $q > \frac{n}{m}$, implica $W^{m,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$

Demostración. Observar [22](Kesavan, 1989, pág. 79)

1. 8 LOS ESPACIOS $L^p(0, T; U)$

U espacio de Banach, con norma $\|.\|_U$, $T \in \mathbb{R}^+$ y $1 \leq p \leq \infty$. Denotamos: $L^p(0, T; U)$

El espacio de Banach de las funciones $v:]0, T[\longrightarrow U$, tales que $(v(t), u)_{U \times U}$ es medible $\forall u \in U$

Caso $1 \leq p < \infty$:

$$L^p(0, T; U) = \left\{ v:]0, T[\longrightarrow U; \ \ v \ \ es \ medible \ y \ \int_0^T \|v(t)\|_U^p dt < \infty \right\}$$

En este conjunto la integral de Lebesgue en $]0, T[$.

$L^p(0, T; U)$ espacio vectorial real, con norma

$$\|v\|_{L^p(0,T;U)} = \left(\int_0^T \|v(t)\|_U^p dt \right)^{1/p}$$

$L^p(0, T; U)$ con la norma definida es un espacio de Banach

Nota 1.5: Cuando $p = 2$ y U espacio de Hilbert entonces $L^p(0, T; U)$ espacio de Hilbert con producto interno:

$$(v, w) = \int_0^T \big(v(t), w(t)\big) dt; \ \ \forall v, w \in L^2(0, T; U)$$

Caso $p = \infty$:

$$L^p(0, T; U) = \{v:]0, T[\longrightarrow U; \ \ v \ \ es \ medible \ y \ \ \underset{t \, \in \,]0, T[}{sup.ess} \|v(t)\|_U < \infty\}$$

$L^p(0, T; U)$ espacio vectorial real, con norma

$$\|v\|_{L^p(0,T;U)} = \underset{t \, \in \,]0, T[}{sup.ess} \|v(t)\|_U$$

$L^p(0, T; U)$ con la norma definida es un espacio de Banach

Definición 1.9

Si $v \in L^p(0, T; U)$, definimos

$$T_v: \mathcal{D}(0, T) \longrightarrow U \quad \text{por}$$

$$\psi \longrightarrow \langle T_v, \psi \rangle = \int_0^T v(t)\psi(t)dt$$

T_v es lineal y continua, i.e $T_v \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T);U)$, al espacio vectorial $\mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T);U)$ se le llama espacio de distribuciones vectoriales sobre $]0,T[$ con valores en el espacio U.

A los componentes de $\mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T);U)$ se le denomina **distribuciones vectoriales** sobre $]0,T[$ y se le expresa por

$$\mathcal{D}'(0,T;U) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T);U)$$

Si $T \in \mathcal{D}'(0,T;U)$, simbolizamos por $\langle T, \psi \rangle$ el valor de T en ψ.

Para la componente $T \in \mathcal{D}'(0,T;U)$ definimos

$$\langle \frac{d^nT}{dt^n}, \psi \rangle = (-1)^n \langle T, \frac{d^n\psi}{dt^n} \rangle \ ; \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(0,T).$$

La distribución vectorial $T_v \in \mathcal{D}'(0,T;U)$ esta unívocamente definida por v; después se identifica a v con T_v y se tiene que

$$L^p(0,T;U) \longrightarrow \mathcal{D}'(0,T;U)$$

Observar [28](Medeiros & Rivera, 1975).

1.9 CONVERGENCIAS

Dada X espacio de Banach, atenderemos tres tipos de convergencias en X

Definición 1.10 (Fuerte)

Dada una sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ se enuncia que converge fuerte (converge en norma) si existe $\varphi \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0$

Habitualmente utilizamos la notación:

$\varphi_n \longrightarrow \varphi$ fuerte en X si $\|\varphi_n - \varphi\| \longrightarrow 0$

(en el cual $\|.\|$ es la norma del espacio normado X)

Definición 1.11 (Débil)

Dada una sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ se enuncia que converge débilmente si existe un $\varphi \in X$ tal que para cada $T \in X'$: $\lim_{n\to\infty} T(\varphi_n) = T(\varphi)$ ……………………….(a)

Designamos $T(\varphi_n)$ por $\langle T, \varphi_n \rangle$ se considera que (a) es análogo a

$$\lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n \rangle = \langle T, \varphi \rangle \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(b)}$$

Una anotación más acostumbrada para (b):

$$\langle T, \varphi_n \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \text{cuando} \quad n \longrightarrow \infty$$

Abreviando diremos que:

$$\varphi_n \rightharpoonup \varphi \ \ sss \ \ \langle T, \varphi_n \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \forall\, T \in X'$$

Definición 1.12 (Débil estrella)

Dada una sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$ de funcionales lineales acotadas en X y $\varphi \in X'$ entonces:

$$\varphi_n \xrightarrow{\star} \varphi \ \ en \ \ X' \Leftrightarrow \langle \varphi_n, w \rangle_{X\times X'} \longrightarrow \langle \varphi, w \rangle_{X\times X'}$$

Nota 1.6: En caso de que una sucesión φ_n converge débil ☆a φ en X' denotaremos por $\varphi_n \xrightarrow{\star} \varphi \ \ en \ \ X'$.

1.10 RESULTADOS IMPORTANTES

Teorema 1.17 (desigualdad de Poincare)

Si el dominio abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es finito, entonces existe una constante $K = K(p)$ tal que $\forall \varphi \in C_0^\infty$

$$\|\varphi\|_{W^{0,p}(\Omega)} \le K|\varphi|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Demostración. Observar [1](Adams & Fournier, 2003, pág. 183)

Proposición 1.3 (desigualdad de Cauchy-Schwarz)

"Sea $(X, \langle .,. \rangle)$ un espacio con producto interno". Se tiene:

$$|\langle v, w \rangle| \le \|v\|.\|w\|\,, \qquad \forall v, w \in X$$

Demostración. Observar [25](Marrero, 2011, pág. 3)

Lema 1.3 (desigualdad de Gronwall)

Cuando $m \in L^1(0,T)$ tal que $m \ge 0$ c.s. en $[0,T]$ y aceptando $b \ge 0$.

Consideremos $\psi \in C^0([0,T],\mathbb{R})$ tal que:

$$\psi(t) \le b + \int_0^t m(s)\psi(s)\,ds, \qquad \forall t \in [0,T]$$

Entonces tenemos que

$$\psi(t) \le b + e^{\int_0^T m(s)ds}, \forall t \in [0,T]$$

Caso simple:

Cuando $\psi \in C^0([0,T],\mathbb{R})$; $\psi(t) \geq 0$, $\forall t \in [0,T]$ y

$$\psi(t) \leq k_1 + k_2 \int_0^t \psi(s)\, ds, \qquad \forall t \in [0,T]$$

Entonces tenemos que

$$\psi(t) \leq k_1 e^{k_2 t}, \forall t \in [0,T]$$

En particular $\psi \equiv 0$, $si\ k_1 = 0$.

Demostración. Observar [6](Bresìz, 1984)**.**

Definición 1.13

Sean (X, d_1) y (Y, d_2) espacios métricos. Una función $g: X \longrightarrow Y$ se dice que es Lipschitz continua, si existe una cte. $C \geq 0$, tal que

$$d_2\big(g(x), g(y)\big) \leq C d_1(x,y) \quad \forall x, y \in X$$

Proposición 1.4

"Una función Lipschitz continua es uniformemente continua"

Demostración. Observar [2](Aguilar Reyes, 2014, pág. 10)

Teorema 1.18 (Alaoglu - Bourbaki)

Sea Y un espacio de Banach. Si la sucesión $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ cumple que $\|v_m\|_Y \leq C$, entonces existe $\left(v_{m_k}\right) \subset (v_m)$, $v \in Y$

tal que $v_{m_k} \overset{\star}{\rightharpoonup} v$ en Y.

Demostración. Observar [7]Brezis

Lema 1.4

Si Ω un abierto acotado $\mathbb{R}_{\boldsymbol{t}}^{\boldsymbol{n}} \times \mathbb{R}_{\boldsymbol{t}}$, g_u y g dos funciones de $L^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, tal que

$$\|g_u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\ , \quad g_u \ \longrightarrow \ g \ \ casi\ en\ todo\ punto\ en\ \Omega$$

Entonces

$g_u \ \longrightarrow \ g$ débilmente en L^q

Demostración. Observar [24]Lions J.L., 1969

Lema 1.5

Sea $\{u_k\}$ una sucesión de funciones tal que cuando $k \longrightarrow \infty$,

$u_k \rightharpoonup u$ debil$-*$ $en\ L^\infty\left(0, T: H^\beta(\Omega)\right)$ y

$\partial_t u_k \longrightarrow \partial_t u$ debilmente en $L^2\big(0,T: H^\alpha(\Omega)\big)$

Donde: $-1 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$. Entonces,

$$u_k \longrightarrow u \quad en \ C\big([0,T]; H^r(\Omega)\big) \ para\ todo\ r < \beta$$

Demostración. Observar [23]Kim J.U., 1989

Lema 1.6 (Aubin – Lions)

Sea A_0, A_1, A espacios de Banach, donde A_0, A reflexivos, $A_0 \subset A$ y $A_0 \overset{\text{Compacta}}{\hookrightarrow} A$, ademas $A_0 \overset{\text{Continua}}{\hookrightarrow} A \overset{\text{continua}}{\hookrightarrow} A_1$.

Sea $U = \{u \in L^{p_0}(0,T;A_0);\ u' \in L^{p_1}(0,T;A_1)\}$ en el cual $1 \leq p_0, p_1 < \infty$ con la norma:

$$\|u\|_U = \|u\|_{L^{p_0}(0,T;A_0)} + \|u'\|_{L^{p_1}(0,T;A_1)}$$

Entonces U es un espacio de Banach y $U \overset{\text{compacta}}{\hookrightarrow} A$.

Demostración. Observar [26](Medeiros & Milla, 1986)

Lema 1.7 (lema de Lions)

Si $Q \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t$ es abierto acotado, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y f funciones de $L^p(Q)$; $1 < p < \infty$ tales que:

i) (u_n) es acotada en $L^p(Q) = L^p\big(0,T; L^p(\Omega)\big)$

ii) $u_n \longrightarrow u$ c.t.p en Q

Entonces $u_n \longrightarrow u$ débil en $L^p(Q)$

Demostración. Observar [26](Medeiros & Milla, 1986) y [29](Milla Miranda & Medeiros, 1987)

CAPÍTULO 2

EXISTENCIA DE SOLUCION FUERTE PARA UN PROBLEMA DE CONTACTO TERMOELASTICO SEMILINEAL

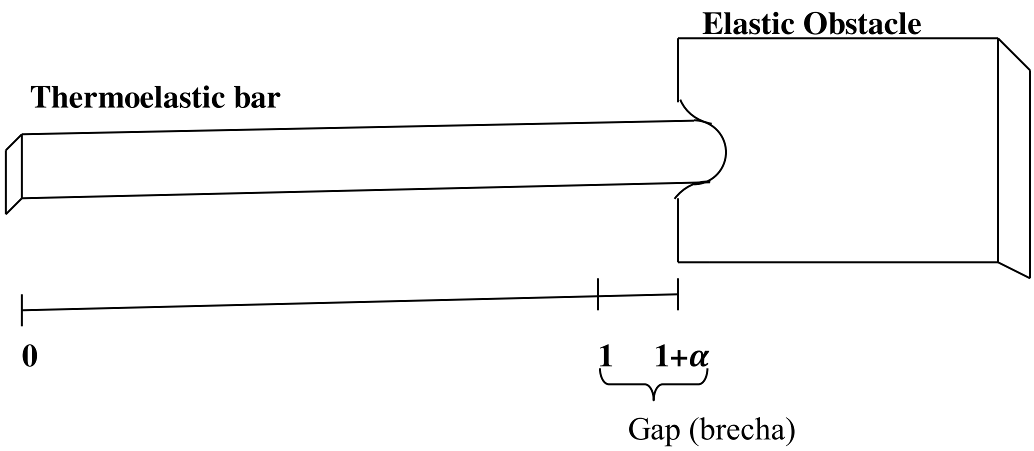
Se estudia el caso en el cual el obstáculo puede ser deformado lo que es posible que exista una penetración. Suponemos que hay fricción en la interacción entre la barra y el obstáculo, ver la fig.

En estas condiciones, el desplazamiento u puede satisfacer: $u < \alpha$ o $u > \alpha$. Las ecuaciones correspondientes para esta situación es dada por:

$u_{tt} - \eta u_{xx} + m\theta_x + N_1(u, \theta) = f(x)$ en $(0,1) \times (0, T)$ ....(1)

$\theta_t - k\theta_{xx} + mu_{xt} + N_2(u, \theta) = g(x)$ en $(0,1) \times (0, T)$ ....(2)

Condiciones iníciales: $u(x, 0) = u_0(x)$, $u_t(x, 0) = u_1(x)$, $\theta(x, 0) = \theta_0(x)$.........(3)



Condiciones de frontera en el lado de contacto:

$$\begin{cases} \eta u_x(1,t) - m\theta(1,t) = -d[(u(1,t)-\alpha)^+]^\mu - b[(u(1,t)-\alpha)^+]^\ell\, u_t(1,t) \text{............(4)} \\ k\theta_x(1,t) = -\beta\theta(1,t) \quad \text{..(5)} \\ \text{Mientras que al final } x = 0 \text{ tenemos:} \\ u(0,t) = 0\,,\ \ \theta_x(0,t) = 0 \quad \text{... (6)} \end{cases}$$

Donde η, m, k, d, b, β son constantes positivas, $\mu \geq 1$, $\ell \geq 0$.

Los términos no lineales $N_1(u,\theta)$ y $N_2(u,\theta)$ cumplen:

$N_1(u,\theta) = N_{11}(u) + N_{12}(\theta)$

$N_{11} \in C^1(\mathbb{R})$, $N_{12} \in C_b^1(\mathbb{R})$, $N_{11}(u)u \geq 0$, $0 \leq N_{12}'(\theta) \leq M_1$,

$N_{12}(0) = 0,$ ....(7)

$N_2(u,\theta) = N_{21}(u) + N_{22}(\theta),$

$N_{21}(u) \in C^{0,1}(\mathbb{R})$, $N_{22}(\theta) \in C_b^1(\mathbb{R})$, $N_{22}'(\theta) \geq 0$ ....(8)

$|N_{11}(u)| \leq M_0|u|$, $N_{11}(u)u \geq \nu \int_0^u N_{11}(s)ds$ $(\nu > 0$ es una cte.$)$ ………….. . (9)

$|N_{21}(u)| \leq M_2|u|$, $|N_{22}(\theta)| \leq M_3|\theta|$, …………………………………………(10)

Donde M_i son constantes positivas $\forall i = 0, 1, 2, 3$.

Con las hipótesis generales, se probará la existencia de la solución fuerte del sistema y la dependencia continua de la solución fuerte en el espacio $H^1(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1)$ con datos iniciales $(u_0, u_1, \theta_0) \in H^1(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1)$. Y por el proceso estándar (Método de Faedo Galerkin [24]) se obtendrá la existencia de la solución global al problema (1) – (6) en el espacio $H^2(0,1) \times H^1(0,1) \times H^2(0,1)$ con datos iniciales $(u_0, u_1, \theta_0) \in H^2(0,1) \times H^1(0,1) \times H^2(0,1)$ con $f, g \in L^2(0,1)$ (referirnos a [32]), que es materia para otro estudio.

2.1 Existencia de solución fuerte del sistema (1) - (6)

Mostraremos la existencia de solución fuerte del problema de contacto termo-elastico semilineal dado por (1) - (6) bajo condiciones (7) - (8). Denotamos la norma de $L^2(0,1)$ por $\|\,.\,\|$

Teorema 2.1. Tomemos $f, g \in L^2(0,1), \alpha > 0$. Suponemos que $N_1(u,\theta)$ y $N_2(u,\theta)$ satisfacen (7) y (8), y $(u_0, u_1, \theta_0) \in H^2(0,1) \times H^1(0,1) \times H^2(0,1)$ además dadas las condiciones fronteras (4) – (6), entonces para cualquier $T > 0$, existe una única solución (u,θ) de (1) - (6) satisfaciendo

$$\partial_t^j u \in L^\infty\left(0,T;H^{2-j}(0,1)\right), \qquad j=0,1,2,$$

$$\partial_t^j \theta \in L^\infty\left(0,T;H^{2-2j}(0,1)\right),$$

$$\theta_{xt} \in L^\infty\big(0,T;L^2(0,1)\big)$$

Por otra parte, tenemos

$$E(t;u,\theta)+\int_0^T\int_0^1|\theta_x|^2\,dxdt+\int_0^T|\theta(1,t)|^2dt+\int_0^T[(u(1,t)-\alpha)^+]^l\,|u_t(1,t)|^2dt$$

$$\leq C\left(\int_0^1(|f|^2+|g|^2)dx+E(0;u,\theta)\right), \tag{2.1}$$

$$\|(u^1-u^2)_x\|^2+\|u_t^1-u_t^2\|^2+\|\theta^1-\theta^2\|^2$$

$$\leq \tilde{C}(\|(u_0^1-u_0^2)_x\|^2+\|u_1^1-u_1^2\|^2+\|\theta_0^1-\theta_0^2\|^2), \tag{2.2}$$

Donde

$$E(t;u,\theta)=\int_0^1\left(|u_t|^2+\eta|u_x|^2+|\theta|^2+2\int_0^u N_{11}(s)ds\right)dx$$

$$+\frac{2d}{\mu+1}[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}$$

(u^1,u_t^1,θ^1) y (u^2,u_t^2,θ^2) son dos soluciones de (1) – (6) con valores iníciales (u_0^1,u_1^1,θ_0^1) y (u_0^2,u_1^2,θ_0^2) respectivamente, C es una constante positiva dependiendo de T, y $\tilde{C}$ es una constante dependiendo solo de T y $\|u_0,u_1,\theta_0\|_{H^1\times L^2\times L^2}$.

Prueba

Solo se dará la prueba de (2.1) y la dependencia continua (2.2) de soluciones fuertes de (1) – (6) en $H^1(0,1)\times L^2(0,1)\times L^2(0,1)$, la prueba de la existencia global en $H^2(0,1)\times H^1(0,1)\times H^2(0,1)$ (por el método de Faedo Galerkin [24]), podríamos referirnos a [32].

Multiplicando a (1), (2) por u_t y θ respectivamente, y realizando una integración por partes sobre [0,1], obtenemos:

$$\int_0^1 u_{tt}u_t dx-\eta\int_0^1 u_{xx}u_t dx+m\int_0^1\theta_x u_t dx+\int_0^1 N_1(u,\theta)u_t dx=\int_0^1 f(x)u_t dx$$

……………………….(2.3)

$$\int_0^1\theta_t\theta dx-k\int_0^1\theta_{xx}\theta dx+m\int_0^1 u_{xt}\theta dx+\int_0^1 N_2(u,\theta)\theta dx=\int_0^1 g(x)\theta dx \quad \ldots\ldots(2.4)$$

Pero:

$$-\eta\int_0^1 u_{xx}u_t dx=-\eta u_t u_x\Big|_0^1+\eta\int_0^1 u_x u_{xt}dx$$

$$= -\eta u_t(1,t)u_x(1,t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\eta\int_0^1 |u_x|^2 dx \quad \ldots\ldots(2.5)$$

También:

$$m\int_0^1 \theta_x u_t dx = m\, u_t\theta \Big|_0^1 - m\int_0^1 \theta u_{xt} dx$$

$$= m u_t(1,t)\theta(1,t) - m\int_0^1 \theta u_{xt} dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (2.6)$$

(2.5) y (2.6) en (2.3); luego sumando (2.3) y (2.4):

$$\int_0^1 u_{tt}u_t dx - \eta u_t(1,t)u_x(1,t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\eta\int_0^1 |u_x|^2 dx + m u_t(1,t)\theta(1,t) - m\cancel{\int_0^1 \theta u_{xt} dx}$$

$$+\int_0^1 N_1(u,\theta)u_t dx + \int_0^1 \theta_t\theta dx - k\int_0^1 \theta_{xx}\theta dx + m\cancel{\int_0^1 u_{xt}\theta dx} + \int_0^1 N_2(u,\theta)\theta dx =$$

$$\int_0^1 f(x)u_t dx + \int_0^1 g(x)\theta dx \quad \ldots\ldots\ldots \ (2.7)$$

Usando la condición Frontera:

$$\eta u_x(1,t) - m\theta(1,t) = -d[(u(1,t)-\alpha)^+]^\mu - b[(u(1,t)-\alpha)^+]^\ell\, u_t(1,t) \ldots (2.8)$$

También:

$$\int_0^1 u_{tt}u_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (u_t)^2\, dx \ldots\ldots.. \ (2.9)$$

También:

$$-k\int_0^1 \theta_{xx}\theta dx = -k\theta_x(1,t)\theta(1,t) + k\int_0^1 \theta_x^2 dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2.10)$$

De (2.8), (2.9) y (2.10) en (2.7):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 |u_t|^2\, dx - u_t(1,t)\left\{-d[(u(1,t)-\alpha)^+]^\mu - b[(u(1,t)-\alpha)^+]^\ell\, u_t(1,t)\right\} +$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\eta\int_0^1 |u_x|^2 dx + \int_0^1 N_1(u,\theta)u_t dx + \int_0^1 \theta_t\theta dx - k\theta_x(1,t)\theta(1,t) + k\int_0^1 \theta_x^2 dx +$$

$$\int_0^1 N_2(u,\theta)\theta dx = \int_0^1 f(x)u_t dx + \int_0^1 g(x)\theta dx \quad \ldots\ldots. \ (2.11)$$

Sabemos:

$$\int_0^1 \theta_t\theta dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \theta^2 dx \quad \ldots\ldots \ (2.12)$$

Dato:

$$N_1(u,\theta) = N_{11}(u) + N_{12}(\theta) \ldots\ldots. \ (2.13)$$

De (2.12)y (2.13) en (2.11):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 |u_t|^2\,dx - d[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu}u_t(1,t) + b[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\ell}\big(u_t(1,t)\big)^2$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\eta\int_0^1 |u_x|^2 dx + \int_0^1 N_{11}(u)u_t dx + \int_0^1 N_{12}(\theta)u_t dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 |\theta|^2 dx -$$

$$k\theta_x(1,t)\theta(1,t) + k\int_0^1 |\theta_x|^2 dx + \int_0^1 N_2(u,\theta)\theta dx =$$

$$\int_0^1 f(x)u_t dx + \int_0^1 g(x)\theta dx \ldots\ldots\ldots\ldots (2.14)$$

Recordemos la condición frontera (5):

$$k\theta_x(1,t) = -\beta\theta(1,t)$$

Se sabe que:

$$d\Big[(u(1,t)-\alpha)^+\Big]^{\mu} u_t(1,t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{\mu+1}\Big[(u(1,t)-\alpha)^+\Big]^{\mu+1}\right) \ldots\ldots\ldots (2.15)$$

Dato:

$$N_2(u,\theta) = N_{21}(u) + N_{22}(\theta) \ldots\ldots\ldots \quad (2.16)$$

De $(5), (2.15)\ y\ (2.16)$ en (2.14):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 |u_t|^2\,dx + \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{\mu+1}\Big[(u(1,t)-\alpha)^+\Big]^{\mu+1}\right) + b\Big[(u(1,t)-\alpha)^+\Big]^{\ell}\big(u_t(1,t)\big)^2 +$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\eta\int_0^1 |u_x|^2 dx + \int_0^1 N_{11}(u)u_t dx + \int_0^1 N_{12}(\theta)u_t dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 |\theta|^2 dx + \beta|\theta(1,t)|^2$$

$$+k\int_0^1 |\theta_x|^2 dx + \int_0^1 N_{21}(u)\theta dx + \int_0^1 N_{22}(\theta)\theta dx = \int_0^1 f(x)u_t dx + \int_0^1 g(x)\theta dx$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.17)$$

Pero:

$$\int_0^1 N_{11}(u)u_t dx = \int_0^1 \left[\frac{d}{dt}\int_0^u N_{11}(s)ds\right] dx \ \ldots\ldots \ (2.18)$$

De (2.18) en (2.17):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^1 \left(|u_t|^2 + \eta|u_x|^2 + |\theta|^2 + 2\int_0^u N_{11}(s)ds\right)dx + \frac{2\mathrm{d}}{\mu+1}[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}\right\}$$

$$= -b[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\ell}|u_t(1,t)|^2 - \int_0^1 N_{12}(\theta)u_t dx - \beta|\theta(1,t)|^2 - k\int_0^1 |\theta_x|^2 dx$$

$$-\int_0^1 N_{21}(u)\theta dx - \int_0^1 N_{22}(\theta)\theta dx + \int_0^1 f(x)u_t dx + \int_0^1 g(x)\theta dx \ \ldots . (2.19)$$

Definiendo la energía asociada al sistema:

$$E(t;u,\theta)=\int_0^1\left(|u_t|^2+\eta|u_x|^2+|\theta|^2+2\int_0^u N_{11}(s)ds\right)dx+$$
$$+\frac{2d}{\mu+1}[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}$$

En (2.19):

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E(t;u,\theta)}=-\boldsymbol{k}\int_0^1|\boldsymbol{\theta_x}|^2\boldsymbol{dx}-b[(u(1,t)-\alpha)^+]^\ell|\boldsymbol{u_t(1,t)}|^2-\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\theta(1,t)}|^2+$$
$$\int_0^1\boldsymbol{f(x)u_t dx}+\int_0^1\boldsymbol{g(x)\theta dx}-\int_0^1\boldsymbol{N_{12}(\theta)u_t dx}-\int_0^1\boldsymbol{N_{21}(u)\theta dx}-\int_0^1\boldsymbol{N_{22}(\theta)\theta dx}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(\mathbf{2.20})$$

Entonces:

$$\frac{d}{dt}E(t;u,\theta)+2k\int_0^1|\theta_x|^2dx+2\beta|\theta(1,t)|^2+2b[(u(1,t)-\alpha)^+]^\ell|u_t(1,t)|^2=$$
$$2\int_0^1 f(x)u_t dx+2\int_0^1 g(x)\theta dx-2\int_0^1 N_{12}(\theta)u_t dx-2\int_0^1 N_{21}(u)\theta dx$$
$$-2\int_0^1 N_{22}(\theta)\theta dx\,.$$

Usando la desigualdad triangular:

$$\frac{d}{dt}E(t;u,\theta)+2k\int_0^1|\theta_x|^2dx+2\beta|\theta(1,t)|^2+2\mathrm{b}[(u(1,t)-\alpha)^+]^\ell|u_t(1,t)|^2$$
$$\leq 2\int_0^1|f(x)u_t|dx+2\int_0^1|g(x)\theta|dx+2\int_0^1|N_{12}(\theta)u_t|dx+2\int_0^1|N_{21}(u)\theta|dx$$
$$+2\int_0^1|N_{22}(\theta)\theta|dx\ \ldots\ldots\ldots\quad(2.21)$$

De los términos no lineales:

De (7): $0\leq N_{12}'(\theta)\leq M_1\longrightarrow 0\leq\int_0^\theta\frac{d}{ds}N_{12}(s)ds\leq\int_0^\theta M_1\,ds\leftrightarrow\ 0\leq N_{12}(\theta)\leq M_1\theta$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2.22)$$

y $N_{12}(0)=0$ ……………………….. (2.23)

De (10): $|N_{21}(u)|\leq M_2|u|$, $|N_{22}(\theta)|\leq M_3|\theta|$

Reemplazando (2.22) y (2.23) en (2.21):

$$\frac{d}{dt}E(t;u,\theta)+2k\int_0^1|\theta_x|^2dx+2\beta|\theta(1,t)|^2+2\mathrm{b}[(u(1,t)-\alpha)^+]^\ell|u_t(1,t)|^2$$
$$\leq 2\int_0^1|f(x)u_t|dx+2\int_0^1|g(x)\theta|dx+2\int_0^1|M_1\theta||u_t|dx+2\int_0^1|M_2||u||\theta|dx+$$
$$+2\int_0^1|M_3||\theta|^2dx\ \ldots\ldots\ldots\quad(2.24)$$

Usando la Desigualdad: $2|ab|\leq|a|^2+|b|^2$ en (2.24)

$$\frac{d}{dt}E(t;u,\theta)+2k\int_0^1|\theta_x|^2dx+2\beta|\theta(1,t)|^2+2b[(u(1,t)-\alpha)^+]^\ell|u_t(1,t)|^2$$

$$\leq\int_0^1|f(x)|^2dx+\int_0^1|u_t|^2dx+\int_0^1|g(x)|^2dx+\int_0^1|\theta|^2dx+M_1\left(\int_0^1|\theta|^2dx+\int_0^1|u_t|^2dx\right)$$

$$M_2\left(\int_0^1|u|^2dx+\int_0^1|\theta|^2dx\right)+2M_3\int_0^1|\theta|^2dx$$

Luego:

$$\frac{d}{dt}E(t;u,\theta)+2k\int_0^1|\theta_x|^2dx+2\beta|\theta(1,t)|^2+2b[(u(1,t)-\alpha)^+]^\ell|u_t(1,t)|^2$$

$$\leq\int_0^1|f(x)|^2dx+\int_0^1|g(x)|^2dx+(1+M_1)\int_0^1|u_t|^2dx+$$

$$(1+M_1+M_2+2M_3)\int_0^1|\theta|^2dx+M_2\int_0^1|u|^2dx\quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (2.25)$$

Tomando $c_1=1+M_1$; $c_2=1+M_1+M_2+2M_3$ en (2.25):

$$\frac{d}{dt}E(t;u,\theta)+2k\int_0^1|\theta_x|^2dx+2\beta|\theta(1,t)|^2+2b[(u(1,t)-\alpha)^+]^\ell|u_t(1,t)|^2$$

$$\leq\int_0^1|f(x)|^2dx+\int_0^1|g(x)|^2dx+c_1\int_0^1|u_t|^2dx+c_2\int_0^1|\theta|^2dx+M_2\int_0^1|u|^2dx\dots(2.26)$$

Establecemos un Lema, que será usado frecuentemente:

Lema 2.2. Si $u(x)\in k_0=\{u\in H^1(0,1)/u(0)=0\}$, entonces

$$\int_0^1|u(x)|^2dx\leq 4\int_0^1|u_x(x)|^2d,\qquad \|u(x)\|^2_{c[0,1]}\leq 4\int_0^1|u_x(x)|^2dx$$

<u>Prueba:</u>

Si $u\in k_0\longrightarrow u\in H^1(0,1)$

Sabemos que $u^2(x)\geq 0$

$$u^2(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x u^2(s)ds=\int_0^x 2u(x)u_x(x)\,dx\longrightarrow u^2(x)=2\int_0^x u(x)u_x(x)\,dx$$

$$\int_0^1 u^2(x)dx=2\int_0^1\left(\int_0^x \underbrace{u(s)u_s(s)\,ds}_{\frac{1}{2}\frac{d}{ds}u^2(s)}\right)dx\leq 4\int_0^1\left(u^2(x)-u^2\cancel{(0)}\right)dx$$

$$\int_0^1 u^2(x)dx\leq 4\int_0^1 u^2(x)dx\leq 4(1-0)\int_0^1 u_x^2(x)dx$$

Poincare

Por tanto: $\boxed{\int_0^1|u(x)|^2dx\leq 4\int_0^1|u_x(x)|^2dx.}$

También como $u(x) \in L^2(0,1)$

$$L^2(0,1) \overset{\text{Continua}}{\hookrightarrow} C[0,1]$$

Entonces: $$\boxed{\|u(x)\|_{C[0,1]} \leq \|u(x)\|_{L^2(0,1)}}$$

Del Lema 2.2: $\int_0^1 \eta |u(x)|^2\, dx \leq \int_0^1 \eta 4 |u_x(x)|^2 dx$,

definición de la energía: $\int_0^1 4\eta |u_x(x)|^2 dx \leq 4E(t; u, \theta)$,

$$\int_0^1 |\theta|^2 dx \leq E(t; u, \theta),$$

$$\int_0^1 |u_t|^2 dx \leq E(t; u, \theta),$$

mayorando por su derecha y haciendo $c_3 = c_1 + c_2 + 4M_2$ en (2.26):

$$\frac{d}{dt} E(t; u, \theta) + k \int_0^1 |\theta_x|^2 dx + \beta |\theta(1,t)|^2 + b[(u(1,t) - \alpha)^+]^\ell |u_t(1,t)|^2$$

$$\leq \int_0^1 |f(x)|^2 dx + \int_0^1 |g(x)|^2 dx + c_3 E(t; u, \theta) \ldots\ldots (2.27)$$

Integrando de 0 a T $(T > 0)$:

$$E(T; u, \theta) + k \int_0^T \int_0^1 |\theta_x|^2 dxdt + \beta \int_0^{\mathrm{T}} |\theta(1,t)|^2 dt +$$

$$+ b \int_0^T [(u(1,t) - \alpha)^+]^\ell |u_t(1,t)|^2 dt$$

$$\leq \int_0^T \int_0^1 |f(x)|^2 dx\, dt + \int_0^T \int_0^1 |g(x)|^2 dxdt + c_3 \int_0^T E(t; u, \theta) dt + E(0; u, \theta) .. (2.28)$$

De (2.28):

$$E(T; u, \theta) \leq \int_0^T \int_0^1 |f(x)|^2 dx\, dt + \int_0^T \int_0^1 |g(x)|^2 dxdt + E(0; u, \theta) +$$

$$c_3 \int_0^T E(t; u, \theta) dt$$

Por la desigualdad de Gronwall's:

$$E(T; u, \theta) \leq$$

$$\left(\int_0^T \int_0^1 |f(x)|^2 dx\, dt + \int_0^T \int_0^1 |g(x)|^2 dxdt + E(0; u, \theta) \right) e^{c_3 T} \ldots (2.29)$$

Llamando $M = \left(\int_0^T \int_0^1 |f(x)|^2 dx\, dt + \int_0^T \int_0^1 |g(x)|^2 dxdt + E(0; u, \theta) \right) \ldots \ldots \ldots (2.30)$

De (2.30) en (2.29):

$$E(T; u, \theta) \leq M e^{c_3 T} \ldots \ldots \ldots \ldots . \ldots (2.31)$$

Pero también integrando de 0 $a\ t$ (t: $fijo$) (2.27), se tiene:

$$E(t; u, \theta) + k \int_0^t \int_0^1 |\theta_x|^2 dxdt + \beta \int_0^{\mathrm{t}} |\theta(1,t)|^2 dt +$$

$$+b\int_0^t [(u(1,t)-\alpha)^+]^\ell |u_t(1,t)|^2 dt$$

$$\leq \int_0^t\int_0^1 |f(x)|^2 dx\, dt + \int_0^t\int_0^1 |g(x)|^2 dxdt + C_3\int_0^t E(t;u,\theta)dt + E(0;u,\theta) \ldots (2.32)$$

De (2.32):

$$E(t;u,\theta) \leq \int_0^t\int_0^1 |f(x)|^2 dx\, dt + \int_0^t\int_0^1 |g(x)|^2 dxdt + E(0;u,\theta) +$$

$$c_3\int_0^t E(s;u,\theta)ds$$

Por la desigualdad de Gronwall's:

$$E(t;u,\theta) \leq \left(\int_0^t\int_0^1 |f(x)|^2 dx\, dt + \int_0^t\int_0^1 |g(x)|^2 dxdt + E(0;u,\theta)\right)e^{c_3 t} \ldots\ldots (2.33)$$

Llamando $M_1 = \left(\int_0^t\int_0^1 |f(x)|^2 dx\, dt + \int_0^t\int_0^1 |g(x)|^2 dxdt + E(0;u,\theta)\right) \ldots\ldots\ldots (2.34)$

De (2.34) en (2.33):

$$E(t;u,\theta) \leq M_1 e^{c_3 t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.35)$$

De (2.35), (2.34) y (2.30): $E(t;u,\theta) \leq M_1 e^{c_3 t} \leq Me^{C_3 t} \leq Me^{C_3 T},\ \ t < T \ldots. (2.36)$

Integrando de 0 a T la desigualdad (2.36):

$$\int_0^T E(t;u,\theta) \leq MTe^{c_3 T} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (2.37)$$

De (2.28) mayorando por su derecha y (2.30):

$$k\int_0^T\int_0^1 |\theta_x|^2 dxdt + \beta\int_0^T |\theta(1,t)|^2 dt + b\int_0^T [(u(1,t)-\alpha)^+]^\ell |u_t(1,t)|^2 dt$$

$$\leq M + c_3\int_0^T E(t;u,\theta)dt \ldots\ldots\ldots\ldots (2.38)$$

De (2.37) en (2.38):

$$k\int_0^T\int_0^1 |\theta_x|^2 dxdt + \beta\int_0^T |\theta(1,t)|^2 dt + +b\int_0^T [(u(1,t)-\alpha)^+]^\ell |u_t(1,t)|^2 dt$$

$$\leq M + c_3 MTe^{c_3 T} = M(1 + c_3 Te^{c_3 T}) \ldots\ldots\ldots (2.39)$$

Llamemos $H = min\{k,\beta,b\}$ en (2.39):

$$H\left(\int_0^T\int_0^1 |\theta_x|^2 dxdt + \int_0^T |\theta(1,t)|^2 dt + \int_0^T [(u(1,t)-\alpha)^+]^\ell |u_t(1,t)|^2 dt\right) \leq$$

$$M(1 + c_3 Te^{c_3 T}) \ldots\ldots\ldots (2.40)$$

$$\int_0^T\int_0^1 |\theta_x|^2 dxdt + \int_0^T |\theta(1,t)|^2 dt + \int_0^T [(u(1,t)-\alpha)^+]^\ell |u_t(1,t)|^2 dt \leq$$

$$\frac{M}{H}(1 + c_3 Te^{c_3 T}) \ldots\ldots\ldots (2.41)$$

Usando (2.36) en la desigualdad (2.41):

$$E(t;u,\theta)+\int_0^T\int_0^1|\theta_x|^2dxdt+\int_0^T|\theta(1,t)|^2dt+\int_0^T[(u(1,t)-\alpha)^+]^\ell|u_t(1,t)|^2dt\le$$

$$\frac{M}{H}(1+c_3Te^{c_3T})+Me^{c_3T}=\left(\frac{1+c_3Te^{c_3T}}{H}+e^{c_3T}\right)M\ \dots\dots\dots(2.42)$$

Es decir se concluye con la desigualdad (2.1):

$$E(t;u,\theta)+\int_0^T\int_0^1|\theta_x|^2dxdt+\int_0^T|\theta(1,t)|^2dt+\int_0^T[(u(1,t)-\alpha)^+]^\ell|u_t(1,t)|^2dt\le$$

$$c_4\left(\int_0^T\int_0^1|f(x)|^2dx\,dt+\int_0^T\int_0^1|g(x)|^2dxdt+E(0;u,\theta)\right)$$

Donde: $c_4=\left(\frac{1+c_3Te^{c_3T}}{H}+e^{c_3T}\right)$ es una constante que depende de T (T: fijo)

Es decir:

$$E(t;u,\theta)+\int_0^T\int_0^1|\theta_x|^2dxdt+\int_0^T|\theta(1,t)|^2dt+\int_0^T[(u(1,t)-\alpha)^+]^\ell|u_t(1,t)|^2dt\le$$

$$c_4\left(T\left(\int_0^1|f(x)|^2dx+\int_0^1|g(x)|^2dx\right)+E(0;u,\theta)\right)\le$$

$$c_4c_5\left(\int_0^1|f(x)|^2dx+\int_0^1|g(x)|^2dx+E(0;u,\theta)\right)$$

Donde: $c_5=mayor\{T,1\}$

Finalmente:

$$E(t;u,\theta)+\int_0^T\int_0^1|\theta_x|^2dxdt+\int_0^T|\theta(1,t)|^2dt+\int_0^T[(u(1,t)-\alpha)^+]^\ell|u_t(1,t)|^2dt\le$$

$$C\left(\int_0^1|f(x)|^2dx+\int_0^1|g(x)|^2dx+E(0;u,\theta)\right)$$

Donde: $C=c_4c_5$ es una constante que depende de T (T es fijo)

■

DEPENDENCIA CONTINÚA DE LA SOLUCION FUERTE DE (1)-(6) EN $\boldsymbol{H^1(0,1)\times L^2(0,1)\times L^2(0,1)}$:

Recordando el sistema del Problema original:

$$u_{tt}-\eta u_{xx}+m\theta_x+N_1(u,\theta)=f(x)\ \dots\dots\dots\dots\dots\ (1)$$

$$\theta_t-k\theta_{xx}+mu_{xt}+N_2(u,\theta)=g(x)\ \dots\dots\dots\dots\dots\ (2)$$

Supongamos que (u^1,u_t^1,θ^1) y (u^2,u_t^2,θ^2) son dos soluciones del sistema (1) – (6) con sus valores iniciales $(u_0^1,u_1^1,\theta_0^1),(u_0^2,u_1^2,\theta_0^2)\in \boldsymbol{H^2(0,1)\times H^1(0,1)\times H^2(0,1)}$, respectivamente.

Reemplazando en el sistema (1) y (2), se obtiene:

$$u_{tt}^1 - \eta u_{xx}^1 + m\theta_x^1 + N_1(u^1, \theta^1) = f(x) \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2.43)$$

$$\theta_t^1 - k\theta_{xx}^1 + mu_{xt}^1 + N_2(u^1, \theta^1) = g(x) \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2.44)$$

y

$$u_{tt}^2 - \eta u_{xx}^2 + m\theta_x^2 + N_1(u^2, \theta^2) = f(x) \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2.45)$$

$$\theta_t^2 - k\theta_{xx}^2 + mu_{xt}^2 + N_2(u^2, \theta^2) = g(x) \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2.46)$$

Restando (2.43) y (2.45); (2.44)y (2.46):

$$(u_{tt}^1 - u_{tt}^2) - \eta(u_{xx}^1 - u_{xx}^2) + m(\theta_x^1 - \theta_x^2) + N_1(u^1, \theta^1) - N_1(u^2, \theta^2) = 0 \dots\dots (2.47)$$

$$(\theta_t^1 - \theta_t^2) - k(\theta_{xx}^1 - \theta_{xx}^2) + m(u_{xt}^1 - u_{xt}^2) + N_2(u^1, \theta^1) - N_2(u^2, \theta^2) = 0 \dots\dots (2.48)$$

Denotemos por $U = u^1 - u^2$ y $\ominus = \theta^1 - \theta^2$

Reemplazando en (2.47) y (2.48), entonces $(U, \ominus)$ satisface:

$$\boldsymbol{U_{tt} - \eta U_{xx} + m \ominus_x + N_1(u^1, \theta^1) - N_1(u^2, \theta^2) = 0} \text{ en } (0,1) \times (0, T) \ \dots.. \ (2.49)$$

$$\boldsymbol{\ominus_t - k \ominus_{xx} + m\mathbf{U}_{xt} + N_2(u^1, \theta^1) - N_2(u^2, \theta^2) = 0} \text{ en } (0,1) \times (0, T) \ \dots.. \ (2.50)$$

De las **condiciones iniciales:**

$$u^1(x, 0) = u_0^1(x), \qquad u_t^1(x, 0) = u_1^1(x), \qquad \theta^1(x, 0) = \theta_0^1(x)$$

$$u^2(x, 0) = u_0^2(x), \qquad u_t^2(x, 0) = u_1^2(x), \qquad \theta^2(x, 0) = \theta_0^2(x)$$

Restando:

$$u^1(x, 0) - u^2(x, 0) = u_0^1(x) - u_0^2(x),$$

$$u_t^1(x, 0) - u_t^2(x, 0) = u_1^1(x) - u_1^2(x),$$

$$\theta^1(x, 0) - \theta^2(x, 0) = \theta_0^1(x) - \theta_0^2(x)$$

Luego se tiene:

$$\boldsymbol{U(x, 0) = U_0(x)}, \quad \boldsymbol{U_t(x, 0) = U_1(x)}, \qquad \boldsymbol{\ominus (x, 0) = \ominus_0 (x)} \ \dots\dots\dots\dots \ (2.51)$$

Además las **condiciones de frontera** en el lado de contacto está dado por:

$$\eta u_x^1(1, t) - m\theta^1(1, t) = -d[(u^1(1, t) - \alpha)^+]^\mu - b[(u^1(1, t) - \alpha)^+]^\ell u_t^1(1, t)$$

$$\eta u_x^2(1, t) - m\theta^2(1, t) = -d[(u^2(1, t) - \alpha)^+]^\mu - b[(u^2(1, t) - \alpha)^+]^\ell u_t^2(1, t)$$

Restando ambas ecuaciones:

$$\eta\big(u_x^1(1, t) - u_x^2(1, t)\big) - m\big(\theta^1(1, t) - \theta^2(1, t)\big) =$$

$$-d\{[(u^1(1, t) - \alpha)^+]^\mu - [(u^2(1, t) - \alpha)^+]^\mu\}$$

$$-b\big\{[(u^1(1, t) - \alpha)^+]^\ell u_t^1(1, t) - [(u^2(1, t) - \alpha)^+]^\ell u_t^2(1, t)\big\}$$

Luego se tiene:

$$\boldsymbol{\eta U_x(1, t) - m \ominus (1, t) = -d\{[(u^1(1, t) - \alpha)^+]^\mu - [(u^2(1, t) - \alpha)^+]^\mu\}}$$

$$\boldsymbol{-b\big\{[(u^1(1, t) - \alpha)^+]^\ell u_t^1(1, t) - [(u^2(1, t) - \alpha)^+]^\ell u_t^2(1, t)\big\}} \dots\dots\dots.. (2.52)$$

y como:

$$k\theta_x^1(1,t) = -\beta\theta^1(1,t)$$

$$k\theta_x^2(1,t) = -\beta\theta^2(1,t)$$

Restando ambas ecuaciones:

$$k\big(\theta_x^1(1,t) - \theta_x^2(1,t)\big) = -\beta\big(\theta^1(1,t) - \theta^2(1,t)\big)$$

Luego se tiene:

$$\boldsymbol{k \ominus_x (1,t) = -\beta \ominus (1,t)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \quad (2.53)$$

De la condición (6) mientras que cuando $x = 0$:

$$u^1(0,t) = 0\,, \qquad \theta_x^1(0,t) = 0$$

$$u^2(0,t) = 0\,, \qquad \theta_x^2(0,t) = 0$$

Restando ambas:

$$u^1(0,t) - u^2(0,t) = 0\,, \qquad \theta_x^1(0,t) - \theta_x^2(0,t)$$

Luego se tiene:

$$\boldsymbol{U(0,t) = 0} \quad \ldots\ldots..\ldots\ldots\ldots(2.54)$$

$$\boldsymbol{\ominus_x (0,t) = 0} \ldots\ldots\ldots..\ldots(2.55)$$

Entonces por $(2.49), (2.50), (2.51), (2.52), (2.53), (2.54)\ y\ (2.55)$ se tiene el problema:

$U_{tt} - \eta U_{xx} + m \ominus_x + N_1(u^1,\theta^1) - N_1(u^2,\theta^2) = 0$ en $(0,1) \times (0,T)$

$\ominus_t - k \ominus_{xx} + m\mathrm{U}_{xt} + N_2(u^1,\theta^1) - N_2(u^2,\theta^2) = 0$ en $(0,1) \times (0,T)$

condiciones iniciales:

$U(x,0) = U_0(x)\,,\ \ U_t(x,0) = U_1(x)\,, \qquad \ominus(x,0) = \ominus_0(x)\ .$

Condiciones de frontera en el lado de contacto:

$\eta U_x(1,t) - m \ominus (1,t) = -d\{[(u^1(1,t) - \alpha)^+]^\mu - [(u^2(1,t) - \alpha)^+]^\mu\}$

$\qquad -b\big\{[(u^1(1,t) - \alpha)^+]^\ell u_t^1(1,t) - [(u^2(1,t) - \alpha)^+]^\ell u_t^2(1,t)\big\}$

$k \ominus_x (1,t) = -\beta \ominus (1,t)$

Mientras que cuando $x = 0$:

$U(0,t) = 0\,,\ \ominus_x (0,t) = 0$

Usaremos con frecuencia el **Lema 2.2** (anteriormente dado y demostrado).

Con el fin de obtener la dependencia continua de la solución fuerte de (1) – (6) en $H^1(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1)$ damos el siguiente lema acerca de regularidad de frontera para la solución de ecuación de onda en una dimensión.

Lema 2.3: Sea $q(x) \in C^1[l_1, l_2]$ y $f_1 \in L^2(0,T; L^2(l_1, l_2))$. Entonces para cualquier solución v tal que $\partial_t^j v \in L^2\left(0,T; H^{2-j}(l_1, l_2)\right)$ $(j = 0,1,2)$ de la ecuación

$v_{tt} - \eta v_{xx} = f_1,$ ………………. (2.56)

Se tiene:

$$-\frac{d}{dt}\int_{l_1}^{l_2} q(x)v_t v_x dx = -\frac{q(x)}{2}\left(v_t^2(x,t) + \eta v_x^2(x,t)\right)\Big|_{l_1}^{l_2} + \frac{1}{2}\int_{l_1}^{l_2} q'(x)(v_t^2 + \eta v_x^2)dx - \int_{l_1}^{l_2} q(x)v_x f_1 dx$$

<u>Demostración:</u>

Multiplicamos la ecuación (2.56) por $q(x)v_x(x,t)$:

$$v_{tt}q(x)v_x(x,t) - \eta v_{xx}q(x)v_x(x,t) = f_1(x,t)q(x)v_x(x,t) \ldots\ldots\ldots \quad (2.57)$$

Integrando (2.57) de l_1 $hasta$ l_2 :

$$\int_{l_1}^{l_2} v_{tt}q(x)v_x(x,t)dx - \eta\int_{l_1}^{l_2} v_{xx}q(x)v_x(x,t)dx = \int_{l_1}^{l_2} f_1(x,t)q(x)v_x(x,t)dx$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.58)$$

Si derivamos respecto a t el término $\int_{l_1}^{l_2} v_t(x,t)q(x)v_x(x,t)dx$:

$$\frac{d}{dt}\int_{l_1}^{l_2} v_t(x,t)q(x)v_x(x,t)dx = \int_{l_1}^{l_2} q(x)\frac{d}{dt}(v_t v_x)dx = \int_{l_1}^{l_2} q(x)[v_{tt}v_x + v_t v_{xt}]dx$$

$$= \int_{l_1}^{l_2} q(x)v_{tt}v_x dx + \int_{l_1}^{l_2} q(x)v_t v_{xt} dx$$

Luego:

$$\frac{d}{dt}\int_{l_1}^{l_2} v_t q(x)v_x dx - \int_{l_1}^{l_2} q(x)v_t v_{xt} dx = \int_{l_1}^{l_2} q(x)v_{tt}v_x dx \quad \ldots\ldots \quad (2.59)$$

Además integrando por partes: $\int_{l_1}^{l_2} q(x)v_t v_{xt}dx$, $v_{xt} = v_{tx}$ pues $v \in L^2(0,T; H^2)$ y como $H^2 \subset H^1 \hookrightarrow C^0$, sea

$$z = q(x) \longrightarrow \quad dz = q'(x)dx$$

$$dw = v_t v_{tx} dx \quad \longrightarrow \quad w = \frac{1}{2}v_t^2$$

Luego:

$$\int_{l_1}^{l_2} q(x)v_t v_{tx} dx = \frac{1}{2}q(x)v_t^2\Big|_{l_1}^{l_2} - \frac{1}{2}\int_{l_1}^{l_2} q'(x)v_t^2 dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.60)$$

De (2.60) en (2.59):

$$\int_{l_1}^{l_2} q(x)v_{tt}v_x dx = \frac{d}{dt}\int_{l_1}^{l_2} v_t q(x)v_x dx - \frac{1}{2}q(x)v_t^2\Big|_{l_1}^{l_2} + \frac{1}{2}\int_{l_1}^{l_2} q'(x)v_t^2 dx \ldots\ldots (2.61)$$

Por otro lado integrando por partes: $\int_{l_1}^{l_2} v_{xx} q(x) v_x dx$

$$z = q(x) \longrightarrow \quad dz = q'(x)dx$$

$$dw = v_x v_{xx} dx \quad \longrightarrow \quad w = \frac{1}{2} v_x^2$$

Luego:

$$\eta \int_{l_1}^{l_2} v_{xx} q(x) v_x dx = \frac{\eta}{2} q(x) v_x^2 \Big|_{l_1}^{l_2} - \frac{\eta}{2} \int_{l_1}^{l_2} q'(x) v_x^2 dx \; \ldots\ldots.. \; (2.62)$$

Reemplazando (2.61) y (2.62) en (2.58):

$$\frac{d}{dt} \int_{l_1}^{l_2} v_t q(x) v_x dx - \frac{1}{2} q(x) v_t^2 \Big|_{l_1}^{l_2} + \frac{1}{2} \int_{l_1}^{l_2} q'(x) v_t^2 dx -$$

$$\eta \left[\frac{q(x)}{2} v_x^2 \Big|_{l_1}^{l_2} + \frac{\eta}{2} \int_{l_1}^{l_2} q'(x) v_x^2 dx \right] = \int_{l_1}^{l_2} f_1(x,t) q(x) v_x(x,t) dx$$

Ordenando:

$$\frac{d}{dt} \int_{l_1}^{l_2} v_t q(x) v_x dx - \frac{q(x)}{2} [v_t^2 + \eta v_x^2] \Big|_{l_1}^{l_2} + \frac{\eta}{2} \int_{l_1}^{l_2} q'(x) v_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_{l_1}^{l_2} q'(x) v_t^2 dx$$

$$= \int_{l_1}^{l_2} f_1 q(x) v_x dx$$

Entonces:

$$\frac{d}{dt} \int_{l_1}^{l_2} v_t q(x) v_x dx - \frac{q(x)}{2} [v_t^2 + \eta v_x^2] \Big|_{l_1}^{l_2} + \frac{1}{2} \int_{l_1}^{l_2} q'(x) (\eta v_x^2 + v_t^2) dx$$

$$= \int_{l_1}^{l_2} f_1 q(x) v_x dx$$

Multiplicando por " $-$ ":

$$-\frac{d}{dt} \int_{l_1}^{l_2} q(x) v_t v_x dx = -\frac{q(x)}{2} [v_t^2(x,t) + \eta v_x^2(x,t)] \Big|_{l_1}^{l_2}$$

$$+\frac{1}{2} \int_{l_1}^{l_2} q'(x) (\eta v_x^2 + v_t^2) dx = -\int_{l_1}^{l_2} q(x) v_x f_1 dx$$

Queda demostrado el **Lema 2.3**. ■

Ahora, aplicaremos el **Lema 2.3** a la ecuación (1):

$$u_{tt} - \eta u_{xx} = f(x) - m\theta_x - N_1(u,\theta) \; \ldots\ldots\ldots \; (2.63)$$

Considerando $h(x,t) = f(x) - m\theta_x - N_1(u,\theta)$ en (2.63):

$$u_{tt} - \eta u_{xx} = h(x,t) \; \ldots\ldots\ldots\ldots. \; (2.64)$$

Afirmación 1:

$\boldsymbol{h \in L^2\left(0,T;L^2(0,1)\right)}$ es decir

$$\int_0^T |h(x,t)|^2_{L^2(0,1)}dt < \infty$$

En efecto:

De hipótesis $\theta \in L^\infty\big(0,T;H^2(0,1)\big) \longrightarrow \theta_x \in L^\infty\big(0,T;L^2(0,1)\big)$

Como $L^\infty\big(0,T;L^2(0,1)\big) \subset L^2\big(0,T;L^2(0,1)\big)$

$$\longrightarrow \boldsymbol{m\theta_x \in L^2\left(0,T;L^2(0,1)\right)} \;; \quad (\, m = cte\ real)$$

De otro lado:

$$N_1(u,\theta) = N_{11}(u) + N_{12}(\theta)$$

De hipótesis:

$$|N_{11}(u)| \le M_0|u| \longrightarrow \int_0^1 N_{11}^2\big(u(x,t)\big)\,dx \le M_0^2 \int_0^1 |u(x,t)|^2\,dx < +\infty$$

$$\longrightarrow\ N_{11}(u) \in L^\infty\big(0,T;L^2(0,1)\big) \subset L^2\big(0,T;L^2(0,1)\big)\ \ldots\ldots\ldots\ (2.65)$$

También como $N_{12} \in C_b^1(\mathbb{R}) \longrightarrow\ N_{12}$ es acotado en $\mathbb{R}$

Luego $N_{12}(\theta) \le k$ esto es $N_{12}\big(\theta(x,t)\big) \le k\ \ \forall t \in\,]0,T[\,,\ \forall x \in\,]0,1[$

Además:

$$\int_0^1 N_{12}^2\big(\theta(x,t)\big)\,dx \le \int_0^1 k^2 dx < +\infty$$

Por tanto

$$N_{12}(\theta) \in L^\infty\big(0,T;L^2(0,1)\big) \subset L^2\big(0,T;L^2(0,1)\big)\ \ldots\ldots\ldots\ (2.66)$$

De (2.65) y (2.66): $\boldsymbol{N_1(u,\theta) \in L^2\left(0,T;L^2(0,1)\right)}$

También de hipótesis: $f \in L^2(0,1)$

Luego:

$\int_0^1 f^2(x)dx < \infty$ es decir $\|f\|_{L^2(0,1)} < +\infty$

Por lo tanto

$$\int_0^T \|f\|^2_{L^2(0,1)}\,dt < +\infty \ \longrightarrow\ \boldsymbol{f \in L^2\left(0,T;L^2(0,1)\right)}$$

Luego se concluye:

$$h = f - m\theta_x - N_1(u,\theta) \in L^2\big(0,T;L^2(0,1)\big)$$

■

<u>Afirmamos 2:</u>

$$\boldsymbol{[u_t^2(1,t)+\eta u_x^2(1,t)] \leq \frac{2d}{dt}\int_0^1 x u_t u_x dx}$$
$$\boldsymbol{+ C_1\int_0^1 \left(u_t^2+u_x^2+\theta^2+\theta_x^2+f^2\right)dx\,, \qquad t \in [0,T]}$$

En efecto:

Ahora consideremos: $q(x)=x$, $q\in C^1[0,1]$ y $h\in L^2\big(0,T;L^2(0,1)\big)$ para aplicar el **Lema 2.3** a la ecuación (2.64):

$u_{tt}-\eta u_{xx}=h$, nosotros tenemos

$$-\frac{d}{dt}\int_0^1 x u_t u_x dx = -\frac{x}{2}[u_t^2(x,t)+\eta u_x^2(x,t)]\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 (u_t^2+\eta u_x^2)dx - \int_0^1 x u_x h(x,t)dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \quad (2.67)$$

Esto es

$$-2\frac{d}{dt}\int_0^1 x u_t u_x dx = -x[u_t^2(x,t)+\eta u_x^2(x,t)]\Big|_0^1+\int_0^1 (u_t^2+\eta u_x^2)dx - 2\int_0^1 x u_x h(x,t)dx$$

Entonces:

$$-2\frac{d}{dt}\int_0^1 x u_t u_x dx = -[u_t^2(1,t)+\eta u_x^2(1,t)]+\int_0^1 (u_t^2+\eta u_x^2)dx - 2\int_0^1 x u_x h(x,t)dx$$

Luego:

$$[u_t^2(1,t)+\eta u_x^2(1,t)] = \frac{2d}{dt}\int_0^1 x u_t u_x dx+\int_0^1 (u_t^2+\eta u_x^2)dx - 2\int_0^1 x u_x h(x,t)dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(2.68)$$

Pero:

$$-2\int_0^1 x u_x h(x,t)dx \leq \left|-2\int_0^1 x u_x h dx\right| \leq 2\int_0^1 |x u_x h|dx \leq 2\int_0^1 |u_x||h| \ldots.\ldots.(2.69)$$

Para $0\leq x\leq 1$.

Sabemos $h(x,t)=f(x)-m\theta_x(x,t)-N_1(u,\theta)$

También $N_1(u,\theta)=N_{11}(u)+N_{12}(\theta)$

Luego $h(x,t)=f(x)-m\theta_x(x,t)-N_{11}(u)-N_{12}(\theta)\ldots\ldots\ldots\ldots..$ (2.70)

Reemplazando (2.70) en (2.69):

$$-2\int_0^1 x u_x h(x,t)dx \leq 2\int_0^1 |u_x||f(x)-m\theta_x(x,t)-N_{11}(u)-N_{12}(\theta)|dx$$

Usando la desigualdad triangular:

$$-2\int_0^1 xu_x h(x,t)dx \le 2\int_0^1 |u_x|(|f(x)| + |m\theta_x(x,t)| + |N_{11}(u)| + |N_{12}(\theta)|)dx$$

Usando la Desigualdad: $2|ab| \le |a|^2 + |b|^2$:

$$-2\int_0^1 xu_x h(x,t)dx \le \int_0^1 (|u_x|^2 + |f(x)|^2)dx + m^2\int_0^1 (|u_x|^2 + |\theta_x|^2)dx +$$

$$\int_0^1 (|u_x|^2 + |N_{11}(u)|^2)dx + \int_0^1 (|u_x|^2 + |N_{12}(\theta)|^2)\,dx \;\ldots\ldots\ldots\ldots (2.71)$$

De los terminos no lineales:

De (9): $|N_{11}(u)| \le M_0|u| \;\longrightarrow\; |N_{11}(u)|^2 \le M_0^2|u|^2 \quad \ldots\ldots..(2.72)$

y recordando(2.22):

$$0 \le N_{12}(\theta) \le M_1\theta$$

Reemplazando (2.72) y (2.22) en (2.71):

$$-2\int_0^1 xu_x h(x,t)dx \le \int_0^1 (|u_x|^2 + |f(x)|^2)dx + m^2\int_0^1 (|u_x|^2 + |\theta_x|^2)dx +$$

$$\int_0^1 \left(|u_x|^2 + \big|M_0|u|\big|^2\right)dx + \int_0^1 (|u_x|^2 + |M_1\theta|^2)\,dx \;\ldots\ldots\ldots\ldots (2.73)$$

Reemplazando (2.73) en (2.68):

$$[u_t^2(1,t) + \eta u_x^2(1,t)] \le \frac{2d}{dt}\int_0^1 xu_t u_x dx + \int_0^1 (u_t^2 + \eta u_x^2)dx + \int_0^1 |u_x|^2 dx +$$

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx + m^2\int_0^1 |u_x|^2 dx + m^2\int_0^1 |\theta_x|^2 dx + \int_0^1 |u_x|^2 dx +$$

$$M_0^2\int_0^1 |u|^2 dx + \int_0^1 |u_x|^2 dx + M_1^2\int_0^1 |\theta|^2 dx \;\ldots\ldots\ldots..(2.74)$$

Usando el **Lema 2.2** para, $M_0^2\int_0^1 |u|^2 dx$ tenemos:

$$M_0^2\int_0^1 |u|^2 dx \le 4M_0^2\int_0^1 |u_x|^2 dx \quad \ldots\ldots\ldots..(2.75)$$

Reemplazando (2.75), en (2.74) y mayorando con la constante positiva:

$C_1 = max\{1, (\eta + 3 + m^2 + 4M_0^2), M_1^2, m^2\}$ tenemos:

$$\boldsymbol{[u_t^2(1,t) + \eta u_x^2(1,t)] \le \frac{2d}{dt}\int_0^1 xu_t u_x dx}$$

$$\boldsymbol{+\, C_1\int_0^1 \left(u_t^2 + u_x^2 + \theta^2 + \theta_x^2 + f^2\right)dx\,, \qquad t \in [0,T] \;\ldots\ldots\ldots.\; (2.76)}$$

■

Afirmamos 3:

$$\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{T}} \left(\boldsymbol{u_t^2(1,t)} + \boldsymbol{\eta u_x^2(1,t)}\right) \boldsymbol{dt} \leq \boldsymbol{C_2}$$

En efecto:

Integrando en (2.76) sobre $[0,T]$:

$$\int_0^T \left(u_t^2(1,t) + \eta u_x^2(1,t)\right)dt \leq \int_0^T \left(\frac{2d}{dt}\int_0^1 x u_t u_x dx\right)dt$$

$$+\int_0^T C_1 \left[\int_0^1 (u_t^2 + u_x^2 + \theta^2 + \theta_x^2 + f^2)dx\right]dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.77)$$

Como $0 \leq x \leq 1$ $\longrightarrow$ usando $x \leq 1$ en $\int_0^T \left(\frac{2d}{dt}\int_0^1 x u_t u_x dx\right)dt$, entonces

$$\int_0^T \left(\frac{2d}{dt}\int_0^1 x u_t u_x dx\right)dt \leq \int_0^T \left(\frac{2d}{dt}\int_0^1 u_t u_x dx\right)dt \ \ldots\ldots\ldots\ldots (2.78)$$

Usando la desigualdad triangular en (2.78):

$$\int_0^T \left(\frac{2d}{dt}\int_0^1 u_t u_x dx\right)dt \leq \left|\int_0^T \left(\frac{2d}{dt}\int_0^1 u_t u_x dx\right)dt\right| \leq \int_0^T \left(\frac{d}{dt}2\int_0^1 |u_t u_x| dx\right)dt$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2.79)$$

Usando la desigualdad $2|ab| \leq |a|^2 + |b|^2$ en (2.79):

$$\int_0^T \left(\frac{2d}{dt}\int_0^1 u_t u_x dx\right)dt \leq \int_0^T \left(\frac{d}{dt}\int_0^1 (|u_t|^2 + |u_x|^2)dx\right)dt \ \ldots\ldots\ (2.80)$$

Reemplazando (2.80) y

usando el mayorado de (2.1): $\int_0^1 |u_t|^2 dx \leq C\left(\|f\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2 + E(0;u,\theta)\right) = c_6$

$$\int_0^1 |u_x|^2 dx \leq c_6$$

$$\int_0^T \int_0^1 |\theta_x|^2 dx dt \leq c_6$$

$$\int_0^1 |\theta|^2 dx \leq c_6$$

en (2.77):

$$\int_0^T \left(u_t^2(1,t) + \eta u_x^2(1,t)\right)dt \leq 2c_6T + 3C_1c_6T + C_1c_6 + C_1T\|f\|_{L^2}^2$$

entonces:

$$\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{T}} \left(\boldsymbol{u_t^2(1,t)} + \boldsymbol{\eta u_x^2(1,t)}\right) \boldsymbol{dt} \leq \boldsymbol{C_2} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathbf{2.81})$$

Donde $C_2 = 2c_6T + 3c_6T + C_1c_6 + C_1T\|f\|_{L^2}^2$, es una constante real, que depende de T y de la norma $\|u_0, u_1, \theta_0\|_{H^1 \times L^2 \times L^2}$. ■

Afirmamos 4:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}[\boldsymbol{U_t^2(1,t)} + \boldsymbol{\eta U_x^2(1,t)}] \leq \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \boldsymbol{xU_tU_x dx} + \boldsymbol{C_3}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} (\boldsymbol{U_t^2} + \boldsymbol{U_x^2} + \ominus^2)\boldsymbol{dx} + \boldsymbol{\varepsilon}\left(\mathbf{2} + \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \ominus_x^2\, \boldsymbol{dx}\right)$$

En efecto:

Ahora recordando (2.49) y (2.50):

$U_{tt} - \eta U_{xx} + m\ominus_x + N_1(u^1,\theta^1) - N_1(u^2,\theta^2) = 0$ en $(0,1)\times(0,T)$

$\ominus_t - k\ominus_{xx} + m\mathrm{U}_{xt} + N_2(u^1,\theta^1) - N_2(u^2,\theta^2) = 0$ en $(0,1)\times(0,T)$

Donde: $U = u^1 - u^2$; $\ominus = \theta^1 - \theta^2$

Luego se tiene:

$$U_{tt} - \eta U_{xx} = -m\ominus_x - N_1(u^1,\theta^1) + N_1(u^2,\theta^2) \ldots\ldots\ldots\ldots. \quad (2.82)$$

Si hacemos

$$f_1 = -m\ominus_x - N_1(u^1,\theta^1) + N_1(u^2,\theta^2) \ldots\ldots\ldots\ldots (2.83)$$

Luego de (2.83) en (2.82):

$$U_{tt} - \eta U_{xx} = f_1$$

Considerando $q(x) = x$, $l_1 = 0$, $l_2 = 1$ y $f_1 \in L^2(0,T;L^2(0,1))$ en el **lema 2.3** se tiene:

$$-\frac{d}{dt}\int_0^1 xU_tU_x dx = -\frac{x}{2}[U_t^2(x,t) + \eta U_x^2(x,t)]\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 (U_t^2 + \eta U_x^2)dx - \int_0^1 xU_x f_1(x,t)dx \ldots\ldots\ldots (2.84)$$

Entonces:

$$-2\frac{d}{dt}\int_0^1 xU_tU_x dx = -x[U_t^2(x,t) + \eta U_x^2(x,t)]\Big|_0^1 + \int_0^1 (U_t^2 + \eta U_x^2)dx - 2\int_0^1 xU_x f_1(x,t)dx$$

Entonces:

$$-2\frac{d}{dt}\int_0^1 xU_tU_x = -[U_t^2(1,t) + \eta U_x^2(1,t)] + \int_0^1 (U_t^2 + \eta U_x^2)dx - 2\int_0^1 xU_x f_1(x,t)dx$$

Luego:

$$[U_t^2(1,t) + \eta U_x^2(1,t)] = 2\frac{d}{dt}\int_0^1 xU_tU_x + \int_0^1 (U_t^2 + \eta U_x^2)dx - 2\int_0^1 xU_x f_1(x,t)dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.85)$$

Pero por otro lado:

$$-2\int_0^1 xU_x f_1(x,t)dx \le \left|-2\int_0^1 xU_x f_1 dx\right| \le 2\int_0^1 |xU_x f_1| \le 2\int_0^1 |U_x||f_1| \dots\dots (2.86)$$

Para $0 \le x \le 1$.

De (2.83): $f_1 = -m \ominus_x - N_1(u^1,\theta^1) + N_1(u^2,\theta^2)$

y de los términos no lineales (7): $N_1(u^1,\theta^1) = N_{11}(u^1) + N_{12}(\theta^1)$

$$N_1(u^2,\theta^2) = N_{11}(u^2) + N_{12}(\theta^2)$$

Entonces:

$$f_1(x,t) = -m \ominus_x - N_{11}(u^1) - N_{12}(\theta^1) + N_{11}(u^2) + N_{12}(\theta^2) \dots\dots\dots\dots (2.87)$$

Reemplazando (2.87) en (2.86):

$$-2\int_0^1 xU_x f_1(x,t)dx \le 2\int_0^1 |U_x||-m \ominus_x - N_{11}(u^1) - N_{12}(\theta^1) + N_{11}(u^2) + N_{12}(\theta^2)|$$

Usando la desigualdad triangular:

$$-2\int_0^1 xU_x f_1 dx \le$$

$$2\int_0^1 |U_x|(|m \ominus_x| + |N_{11}(u^1)| + |N_{12}(\theta^1)| + |N_{11}(u^2)| + |N_{12}(\theta^2)|) \dots\dots\dots (2.88)$$

Además de hipótesis (9):

$$|N_{11}(u^1)| \le M_0|u^1| \quad \dots\dots (2.89)$$

Y usando (2.22):

$$0 \le N_{12}(\theta^1) \le M_1\theta^1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2.90)$$

Reemplazando (2.89) y (2.90) en (2.88):

$$-2\int_0^1 xU_x f_1 dx \le$$

$$2\int_0^1 |U_x|(|m \ominus_x| + M_0|u^1| + M_1|\theta^1| + M_0|u^2| + M_1|\theta^2|) \dots\dots\dots (2.91)$$

Pero por notación: $U = u^1 - u^2$; $\ominus = \theta^1 - \theta^2$

Entonces: $u^1 = U + u^2 \;\longrightarrow\; |u^1| \le |U| + |u^2| \dots\dots\dots\dots (2.92)$

$$\theta^1 = \ominus + \theta^2 \;\longrightarrow\; |\theta^1| \le |\ominus| + |\theta^2| \dots\dots\dots\dots (2.93)$$

Reemplazando (2.92) y (2.93) en (2.91):

$$-2\int_0^1 xU_x f_1 dx \le$$

$$2\int_0^1 |U_x|(|m \ominus_x| + M_0(|U| + |u^2|) + M_1(|\ominus| + |\theta^2|) + M_0|u^2| + M_1|\theta^2|) \dots (2.94)$$

Usando la desigualdad $2|a.b| \le |a|^2 + |b|^2$:

$$-2\int_0^1 xU_x f_1 dx \le m\int_0^1 (|U_x|^2 + |\ominus_x|^2) + M_0\int_0^1 (|U_x|^2 + |U|^2) +$$

$$2M_0\int_0^1(|U_x|^2+|u^2|^2)+M_1\int_0^1(|U_x|^2+|\ominus|^2)+2M_1\int_0^1(|U_x|^2+|\theta^2|^2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(2.95)$$

Reemplazando (2.95) en (2.85) y recordando el **Lema 2.2** $\int_0^1|U|^2\leq 4\int_0^1|U_x|^2$:

$$[U_t^2(1,t)+\eta U_x^2(1,t)]\leq 2\frac{d}{dt}\int_0^1 xU_tU_x dx+\int_0^1(U_t^2+\eta U_x^2)dx+$$

$$(m+7M_0+3M_1)\int_0^1|U_x|^2+m\int_0^1|\ominus_x|^2+M_1\int_0^1|\ominus|^2+$$

$$+2M_0\int_0^1|u^2|^2+2M_1\int_0^1|\theta^2|^2\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\ (2.96)$$

Como θ^2 y u^2 son soluciones del sistema $(1)-(6)$ entonces $\theta^2,u^2\in L^2$

Es decir:

$\|u^2\|_{L^2}^2=\int_0^1|u^2|^2\quad y\qquad \|\theta^2\|_{L^2}^2=\int_0^1|\theta^2|^2$,

Haciendo: $C_3=max\left\{\frac{1}{2},\frac{\eta}{2},\frac{(m+7M_0+3M_1)}{2},\frac{M_1}{2}\right\}$

Haciendo: $\varepsilon=max\left\{\frac{m}{2},M_0\|u^2\|_{L^2}^2,M_1\|\theta^2\|_{L^2}^2\right\}$

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}[U_t^2(1,t)+\eta U_x^2(1,t)]\leq\frac{d}{dt}\int_0^1 xU_tU_x dx+C_3\int_0^1\left(U_t^2+U_x^2+\ominus^2\right)dx+}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon\left(2+\int_0^1\ominus_x^2\,dx\right)}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\ \mathbf{(2.97)}$$

Donde C_3 es una constante que depende de T y $\|u_0,u_1,\theta_0\|_{H^1\times L^2\times L^2}$ y ε . ■

<u>Afirmamos 5:</u>

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Phi(t)+k\int_0^1\ominus_x^2\,dx+\beta|\ominus\,(1,t)|^2}$$

$$\boldsymbol{\leq c_{10}+c_9\Phi(t)+c_7|U_t(1,t)|^2+c_8\left|u_t^1(1,t)\right|^2\int_0^1|U_x|^2}$$

En efecto:

Multiplicando a (2.49) por U_t e integrando de 0 a 1 se obtiene:

$$\int_0^1 U_{tt}\,U_t dx-\eta\int_0^1 U_{xx}U_t\,dx+m\int_0^1\ominus_x\,U_t dx+\int_0^1[N_1(u^1,\theta^1)-N_1(u^2,\theta^2)]\,U_t dx$$

$$=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2.98)$$

Multiplicando a (2.50) por $\ominus$ e integrando de 0 a 1 se obtiene:

$$\int_0^1\ominus_t\ominus\,dx-k\int_0^1\ominus_{xx}\ominus\,dx+m\int_0^1 U_{xt}\ominus\,dx+\int_0^1[N_2(u^1,\theta^1)-N_2(u^2,\theta^2)]\ominus\,dx$$

$$=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2.99)$$

Sumando (2.98) y (2.99) se obtiene:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^1 (\ominus^2 + {U_t}^2)dx\right] - \eta\int_0^1 U_{xx}U_t\,dx + m\left[\int_0^1 (\ominus_x\,U_t + U_{xt}\,\ominus)dx\right]$$

$$-k\int_0^1 \ominus_{xx}\ominus\,dx + \int_0^1 [N_1(u^1,\theta^1) - N_1(u^2,\theta^2)]\,U_t dx$$

$$+\int_0^1 [N_2(u^1,\theta^1) - N_2(u^2,\theta^2)]\ominus\,dx = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2.100)$$

Pero: $\eta\int_0^1 U_{xx}U_t\,dx = \eta\left[U_xU_t\Big|_0^1 - \int_0^1 U_{tx}U_x dx\right]$

$$= \eta U_x(1,t)U_t(1,t) - \eta U_x(0,t)U_t(\cancel{0},t) - \eta\int_0^1 U_{tx}U_x dx$$

$$= \boldsymbol{\eta U_x(1,t)U_t(1,t) - \eta\int_0^1 U_{tx}U_x dx} \;\ldots\ldots (\mathbf{2.101})$$

También: $m\left[\int_0^1 (\ominus_x\,U_t + U_{xt}\,\ominus)dx\right] = m\left[\int_0^1 (\ominus_x\,U_t + U_{tx}\,\ominus)dx\right]$

$$= m\int_0^1 \frac{d}{dx}(\ominus\,U_t) = m\ominus U_t\Big|_0^1$$

$$= m\ominus(1,t)U_t(1,t) - m\ominus(0,t)U_t(\cancel{0},t)$$

$$= \boldsymbol{m\ominus(1,t)U_t(1,t)} \ldots\ldots (\mathbf{2.102})$$

También: $k\int_0^1 \ominus_{xx}\ominus\,dx = k\left[\ominus\ominus_x\Big|_0^1 - \int_0^1 \ominus_x^2\,dx\right]$

$$= k\ominus(1,t)\ominus_x(1,t) - k\ominus(0,t)\ominus_x(\cancel{0},t) - k\int_0^1 \ominus_x^2\,dx$$

$$= \boldsymbol{k\ominus(1,t)\ominus_x(1,t) - k\int_0^1 \ominus_x^2\,dx} \;\ldots\ldots (\mathbf{2.103})$$

Remplazando (2.101), (2.102) y (2.103) en (2.100):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^1 (\ominus^2 + {U_t}^2)dx\right] + \eta\int_0^1 U_{tx}\,U_x dx - \eta U_x(1,t)U_t(1,t) + m\ominus(1,t)U_t(1,t)$$

$$+k\int_0^1 \ominus_x^2\,dx - k\ominus(1,t)\ominus_x(1,t) + \int_0^1 [N_1(u^1,\theta^1) - N_1(u^2,\theta^2)]\,U_t dx$$

$$+\int_0^1 [N_2(u^1,\theta^1) - N_2(u^2,\theta^2)]\ominus\,dx = 0 \;..\; (2.104)$$

Pero: $\eta\int_0^1 U_{tx}\,U_x dx = \eta\int_0^1 U_{xt}\,U_x dx = \boldsymbol{\eta\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d}{dt}{U_x}^2 dx} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathbf{2.105})$

Reemplazando (2.105) y

(2.53): $k\ominus_x(1,t) = -\beta\ominus(1,t)$,

en (2.104):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^1 \left(\ominus^2 + {U_t}^2 + \eta {U_x}^2\right)dx\right] - \eta U_x(1,t)U_t(1,t) + m \ominus (1,t)U_t(1,t)$$

$$+k\int_0^1 \ominus_x^2\, dx + \beta \ominus^2 (1,t) + \int_0^1 [N_1(u^1,\theta^1) - N_1(u^2,\theta^2)]\, U_t dx$$

$$+\int_0^1 [N_2(u^1,\theta^1) - N_2(u^2,\theta^2)] \ominus dx = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2.106)$$

Entonces:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^1 \left(\ominus^2 + {U_t}^2 + \eta {U_x}^2\right)dx\right] + k\int_0^1 \ominus_x^2\, dx + \beta \ominus^2 (1,t)$$

$$+\int_0^1 [N_1(u^1,\theta^1) - N_1(u^2,\theta^2)]\, U_t dx + \int_0^1 [N_2(u^1,\theta^1) - N_2(u^2,\theta^2)] \ominus dx$$

$$= [\eta U_x(1,t) - m \ominus (1,t)]U_t(1,t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2.107)$$

Reemplazando

(2.52): $\eta U_x(1,t) - m \ominus (1,t) = -d\{[(u^1(1,t)-\alpha)^+]^\mu - [(u^2(1,t)-\alpha)^+]^\mu\}$

$$-b\{[(u^1(1,t)-\alpha)^+]^\ell u_t^1(1,t) - [(u^2(1,t)-\alpha)^+]^\ell u_t^2(1,t)\}$$

en (2.107):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^1 \left(\ominus^2 + {U_t}^2 + \eta {U_x}^2\right)dx\right] + k\int_0^1 \ominus_x^2\, dx + \beta \ominus^2 (1,t)$$

$$= \int_0^1 [N_1(u^2,\theta^2) - N_1(u^1,\theta^1)]\, U_t dx + \int_0^1 [N_2(u^2,\theta^2) - N_2(u^1,\theta^1)] \ominus dx$$

$$-d\{[(u^1(1,t)-\alpha)^+]^\mu - [(u^2(1,t)-\alpha)^+]^\mu\}U_t(1,t)$$

$$-b\{[(u^1(1,t)-\alpha)^+]^\ell u_t^1(1,t) - [(u^2(1,t)-\alpha)^+]^\ell u_t^2(1,t)\}U_t(1,t). \ldots..(2.108)$$

Usando los términos no lineales: $\boldsymbol{N_1(u^2,\theta^2) = N_{11}(u^2) + N_{12}(\theta^2)}$

$$\boldsymbol{N_1(u^1,\theta^1) = N_{11}(u^1) + N_{12}(\theta^1)}$$

$$\boldsymbol{N_2(u^2,\theta^2) = N_{21}(u^2) + N_{22}(\theta^2)}$$

$$\boldsymbol{N_2(u^1,\theta^1) = N_{21}(u^1) + N_{22}(\theta^1)},$$

Utilizando: $\boldsymbol{u_t^2(1,t) = u_t^1(1,t) - U_t(1,t)}$

y usando la desigualdad triangular en (2.108):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^1 \left(\ominus^2 + {U_t}^2 + \eta {U_x}^2\right)dx\right] + k\int_0^1 \ominus_x^2\, dx + \beta \ominus^2 (1,t)$$

$$\leq \int_0^1 (|N_{11}(u^2)| + |N_{12}(\theta^2)| + |N_{11}(u^1)| + |N_{12}(\theta^1)|).|U_t|dx$$

$$+\int_0^1 (|N_{21}(u^2)| + |N_{22}(\theta^2)| + |N_{21}(u^1)| + |N_{22}(\theta^1)|).|\ominus|dx$$

$$+|d([(u^1(1,t)-\alpha)^+]^\mu-[(u^2(1,t)-\alpha)^+]^\mu)|.|U_t(1,t)|$$
$$+\left|b[(u^1(1,t)-\alpha)^+]^\ell\right||u_t^1(1,t)|.|U_t(1,t)|$$
$$+\left|b[(u^2(1,t)-\alpha)^+]^\ell\right|(|u_t^1(1,t)|+|U_t(1,t)|).|U_t(1,t)| \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.109)$$

Usando;(9): $|N_{11}(u)|\le M_0|u|$,

(10): $|N_{21}(u)|\le M_2|u|$, $|N_{22}(\theta)|\le M_3|\theta|$,

(2.22): $0\le N_{12}(\theta)\le M_1\theta \longrightarrow |\boldsymbol{N_{12}(\theta)}|\le \boldsymbol{M_1|\theta|}$,

(2.1) y observación 2 denotamos:

$$|d([(u^1(1,t)-\alpha)^+]^\mu-[(u^2(1,t)-\alpha)^+]^\mu)|=A_1,$$
$$\left|b[(u^1(1,t)-\alpha)^+]^\ell\right|=A_2,$$
$$\left|b[(u^2(1,t)-\alpha)^+]^\ell\right|=A_3,$$

y la desigualdad: $2|a||b|\le |a|^2+|b|^2$

en (2.109):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^1\left(\ominus^2+{U_t}^2+\eta{U_x}^2\right)dx\right]+k\int_0^1\ominus_x^2\,dx+\beta\ominus^2(1,t)$$
$$\le\frac{M_0}{2}\left(\int_0^1|u^2|^2+\int_0^1|U_t|^2\right)+\frac{M_1}{2}\left(\int_0^1|\theta^2|^2+\int_0^1|U_t|^2\right)$$
$$+\frac{M_0}{2}\left(\int_0^1|u^1|^2+\int_0^1|U_t|^2\right)+\frac{M_1}{2}\left(\int_0^1|\theta^1|^2+\int_0^1|U_t|^2\right)$$
$$+\frac{M_2}{2}\left(\int_0^1|u^2|^2+\int_0^1|\ominus|^2\right)+\frac{M_3}{2}\left(\int_0^1|\theta^2|^2+\int_0^1|\ominus|^2\right)$$
$$+\frac{M_2}{2}\left(\int_0^1|u^1|^2+\int_0^1|\ominus|^2\right)+\frac{M_3}{2}\left(\int_0^1|\theta^1|^2+\int_0^1|\ominus|^2\right)$$
$$+\frac{1}{2}A_1^2+\frac{1}{2}|U_t(1,t)|^2+\frac{1}{2}A_2(|u_t^1(1,t)|^2+|U_t(1,t)|^2)+$$
$$\frac{1}{2}A_3(|u_t^1(1,t)|^2+|U_t(1,t)|^2)+\frac{1}{2}A_3(|U_t(1,t)|^2+|U_t(1,t)|^2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.110)$$

Haciendo:

$$A_4=\left(\frac{M_0+M_2}{2}\right)\left[\int_0^1|u^2|^2+\int_0^1|u^1|^2\right]+\left(\frac{M_1+M_3}{2}\right)\left[\int_0^1|\theta^2|^2+\int_0^1|\theta^1|^2\right],$$

$c_7=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}A_2+\frac{3}{2}A_3$ y

$c_8=\frac{1}{2}A_2+\frac{1}{2}A_3$

en $(\mathbf{2.110})$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^1\left(\ominus^2+{U_t}^2+\eta{U_x}^2\right)dx\right]+k\int_0^1\ominus_x^2\,dx+\beta\ominus^2(1,t)$$

$$\leq (M_0+M_1)\int_0^1 |U_t|^2 + (M_2+M_3)\int_0^1 |\ominus|^2 + A_4 + \frac{1}{2}A_1^2 + C_7|U_t(1,t)|^2$$

$$+c_8|u_t^1(1,t)|^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.111)$$

Recordando que $U \in L^2$: $\|\boldsymbol{U}\|_{\boldsymbol{L^2}}^{\boldsymbol{2}} \geq \boldsymbol{0}$ $\wedge$ $\|U\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |U|^2$,

usando el **Lema 2.2**: $\int_0^1 |U|^2 \leq 4\int_0^1 |U_x|^2 \longrightarrow \boldsymbol{\frac{\eta}{4}\int_0^1 |U|^2 \leq \eta\int_0^1 |U_x|^2}$ **y**

mayorando en (2.111):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^1 \left(\ominus^2 + {U_t}^2 + \eta {U_x}^2\right)dx\right] + k\int_0^1 \ominus_x^2\, dx + \beta\, \ominus^2\,(1,t)$$

$$\leq (M_0+M_1)\int_0^1 |U_t|^2 + (M_2+M_3)\int_0^1 |\ominus|^2 + \boldsymbol{\eta}\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{1}} |\boldsymbol{U_x}|^{\boldsymbol{2}} + A_4 + \frac{1}{2}A_1^2 +$$

$$c_7|U_t(1,t)|^2 + c_8|u_t^1(1,t)|^2\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{1}} |\boldsymbol{U_x}|^{\boldsymbol{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.112)$$

Haciendo $c_9 = max\{M_0+M_1, M_2+M_3, 1\}$,

$c_{10} = A_4 + \frac{1}{2}A_1^2$

$\Phi(t) = \int_0^1 \left(\ominus^2 + {U_t}^2 + \eta {U_x}^2\right)dx$

en (2.112):

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Phi(t) + k\int_0^1 \ominus_x^2\, dx + \beta|\ominus\,(1,t)|^2}$$

$$\boldsymbol{\leq c_{10} + c_9\Phi(t) + c_7|U_t(1,t)|^2 + c_8\left|u_t^1(1,t)\right|^2\int_0^1 |U_x|^2 \ldots\ldots(2.113)}$$

Donde $\Phi(t) = \int_0^1 \left(\ominus^2 + {U_t}^2 + \eta {U_x}^2\right)dx$. ■

Afirmamos 6:

$$\boldsymbol{\Phi(t) + 2k\int_0^t\int_0^1 \ominus_x^2\, dx \leq 2C\left(3 + \int_0^t |U_t(1,s)|^2 ds\right)e^{Ct}}$$

En efecto:

Integrando de 0 a t, minorando y que $u \in H^1$ en (2.113):

$$\Phi(t) + 2k\int_0^t\int_0^1 \ominus_x^2\, dx \leq \Phi(0) + 2\int_0^t c_{10} + 2c_9\int_0^t \Phi(t)$$

$$+2c_7\int_0^t |U_t(1,s)|^2 ds + 2c_8\int_0^t |u_t^1(1,t)|^2\|\boldsymbol{U_x}\|_{L^2}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(2.114)$$

Afirmamos 7: $\boldsymbol{\int_0^t |U_t(1,s)|^2 ds \leq 4C_2 = constante}$

En efecto:

Como $U(x,t) = u^1(x,t) - u^2(x,t) \longrightarrow U_t(1,t) = u_t^1(1,t) - u_t^2(1,t)$

$$\longrightarrow |U_t(1,t)| \leq |u_t^1(1,t)| + |u_t^2(1,t)|$$

$$\longrightarrow |U_t(1,t)|^2 \leq |u_t^1(1,t)|^2 + |u_t^2(1,t)|^2 + 2|u_t^1(1,t)|.|u_t^2(1,t)|$$

Usando: $2|a||b| \leq |a|^2 + |b|^2$

$$\longrightarrow |U_t(1,t)|^2 \leq |u_t^1(1,t)|^2 + |u_t^2(1,t)|^2 + |u_t^1(1,t)|^2 + |u_t^2(1,t)|^2$$

$$\longrightarrow |U_t(1,t)|^2 \leq 2(|u_t^1(1,t)|^2 + |u_t^2(1,t)|^2)$$

$$\longrightarrow \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} |\boldsymbol{U_t(1,t)}|^{\mathbf{2}} \leq 2\int_0^t (|u_t^1(1,t)|^2 + |u_t^2(1,t)|^2) = 4\boldsymbol{C_2}$$

Teniendo en cuenta De (2.81): $\int_0^T (|u_t(1,t)|^2 + \eta|u_x(1,t)|^2)dt \leq C_2$

$$\longrightarrow \int_0^T |u_t(1,t)|^2 dt \leq C_2$$

$$\longrightarrow \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} |\boldsymbol{u_t(1,t)}|^{\mathbf{2}}\boldsymbol{dt} \leq \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{T}} |\boldsymbol{u_t(1,t)}|^{\mathbf{2}}\boldsymbol{dt} \leq \boldsymbol{C_2} \quad ,\forall \boldsymbol{t} \leq \boldsymbol{T}$$

Usando la **afirmación 7** y

haciendo $C = max\{\Phi(0), 2tc_{10}, 2c_9, 2c_7, 2c_8C_2\|U_x\|_{L^2}^2\}$

en (2.114):

$$\Phi(t) + 2k\int_0^t \int_0^1 \ominus_x^2 \, dx \leq 3C + C\int_0^t \Phi(t) + C\int_0^t |U_t(1,s)|^2 ds \; \ldots . (2.115)$$

Tenemos de (2.115):

$$2k\int_0^t \int_0^1 \ominus_x^2 \, dx \leq C\left(3 + \int_0^t |U_t(1,s)|^2 ds\right) + C\int_0^t \Phi(t) \; \ldots \ldots \ldots (2.116)$$

y

$$\Phi(t) \leq C\left(3 + \int_0^t |U_t(1,s)|^2 ds\right) + C\int_0^t \Phi(t) \; \ldots \ldots \ldots (2.117)$$

Usando la desigualdad de Gronwall's en(2.117):

$$\Phi(t) \leq C\left(3 + \int_0^t |U_t(1,s)|^2 ds\right) e^{Ct} \; \ldots \ldots \ldots \ldots . . (2.118)$$

Integrando de $0 \;\; a \;\; t$ (2.118):

$$\int_0^t \Phi(t) \leq C\left(3 + \int_0^t |U_t(1,s)|^2 ds\right) \int_0^t e^{Ct} = \left(3 + \int_0^t |U_t(1,s)|^2 ds\right)(e^{Ct} - 1)$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . (2.119)$$

Reemplazando (2.119) en (2.116):

$$2k\int_0^t \int_0^1 \ominus_x^2 \, dx \leq C\left(3 + \int_0^t |U_t(1,s)|^2 ds\right) + C\left(3 + \int_0^t |U_t(1,s)|^2 ds\right)(e^{Ct} - 1)$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \;\; (2.120)$$

Sumando(2.118) y (2.120):

$$\Phi(t)+2k\int_0^t\int_0^1 \ominus_x^2\,dx \le C\left(3+\int_0^t |U_t(1,s)|^2 ds\right)e^{Ct}$$

$$+C\left(3+\int_0^t |U_t(1,s)|^2 ds\right)+C\left(3+\int_0^t |U_t(1,s)|^2 ds\right)(e^{Ct}-1)$$

Entonces:

$$\boldsymbol{\Phi(t)+2k\int_0^t\int_0^1 \ominus_x^2\,dx \le 2C\left(3+\int_0^t |U_t(1,s)|^2 ds\right)e^{Ct}} \dots\dots\dots\dots(\mathbf{2.121})$$

■

<u>Afirmamos 8:</u>

$$\boldsymbol{\Phi(t)+2k\int_0^t\int_0^1 \ominus_x^2\,dx \le 4M+2Ce^{Ct}\Phi(t)+4CC_3e^{Ct}\int_0^t \Phi(s)ds}$$

$$\boldsymbol{+4Ce^{Ct}\varepsilon\int_0^t\left(2+\int_0^1 \ominus_x^2\,dx\right)ds}$$

En efecto:

De (2.121):

$$\Phi(t)+2k\int_0^t\int_0^1 \ominus_x^2\,dx \le 6Ce^{Ct}+2Ce^{Ct}\int_0^t |U_t(1,s)|^2 ds \dots\dots\dots\dots(2.122)$$

De (2.97):

$$\frac{1}{2}[U_t^2(1,t)+\eta U_x^2(1,t)] \le \frac{d}{dt}\int_0^1 xU_tU_x dx + C_3\int_0^1 (U_t^2+U_x^2+\ominus^2)dx +$$

$$\varepsilon\left(2+\int_0^1 \ominus_x^2\,dx\right)$$

Implica

$$\frac{1}{2}U_t^2(1,t) \le \frac{d}{dt}\int_0^1 xU_tU_x dx + C_3\int_0^1 (U_t^2+U_x^2+\ominus^2)dx +$$

$$\varepsilon\left(2+\int_0^1 \ominus_x^2\,dx\right)\dots\dots\dots\dots\ (2.123)$$

Reemplazando (2.123) en (2.122):

$$\Phi(t)+2k\int_0^t\int_0^1 \ominus_x^2\,dx \le 6Ce^{Ct}+4Ce^{Ct}\int_0^t \frac{d}{dt}\int_0^1 xU_tU_x dx\,ds$$

$$+4Ce^{Ct}\int_0^t C_3\int_0^1 (U_t^2+U_x^2+\ominus^2)dxds$$

$$+4Ce^{Ct}\int_0^t \varepsilon\left(2+\int_0^1 \ominus_x^2\,dx\right)ds \dots\dots\dots(2.124)$$

Pero: $\int_0^t \frac{d}{dt}\int_0^1 xU_tU_x dx = \int_0^1 \int_0^t \frac{d}{dt}[xU_tU_x dt]dx$

$$= \int_0^1 [xU_x(x,t)U_t(x,t) - xU_x(x,0)U_t(x,0)] \dots\dots (2.125)$$

Usando la desigualdad triangular en (2.125):

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\int_0^1 xU_tU_x dx \leq \int_0^1 [|xU_x(x,t)U_t(x,t)| + |xU_x(x,0)U_t(x,0)|]$$

$$\leq \int_0^1 [|U_x(x,t)||U_t(x,t)| + |U_x(x,0)||U_t(x,0)|] \dots\dots..(2.126)$$

Pues $0 < x < 1$.

Usando la desigualdad $2|a||b| \leq |a|^2 + |b|^2$ en (2.126):

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\int_0^1 xU_tU_x dx \leq \frac{1}{2}\int_0^1 [|U_x(x,t)|^2 + |U_t(x,t)|^2] + \frac{1}{2}\int_0^1 [|U_x(x,0)|^2 + |U_t(x,0)|^2]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 [|U_x(x,t)|^2 + |U_t(x,t)|^2] + \frac{1}{2}\|U_x(x,0)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|U_t(x,0)\|_{L^2}^2 \dots\dots (2.127)$$

Reemplazando (2.127) en (2.124):

$$\Phi(t) + 2k\int_0^t\int_0^1 \ominus_x^2\, dx \leq 6Ce^{Ct} + 2Ce^{Ct}\left(\int_0^1 [|U_x(x,t)|^2 + |U_t(x,t)|^2]\right)$$

$$+2Ce^{Ct}\left(\|U_x(x,0)\|_{L^2}^2 + \|U_t(x,0)\|_{L^2}^2\right) + 4Ce^{Ct}\int_0^t C_3\int_0^1 (U_t^2 + U_x^2 + \ominus^2)dxds$$

$$+4Ce^{Ct}\int_0^t \varepsilon\left(2 + \int_0^1 \ominus_x^2\, dx\right)ds \dots\dots..(2.128)$$

Usando: $|U_x(x,t)|^2 = \eta|U_x(x,t)|^2 + (1-\eta)|U_x(x,t)|^2$,

Mayorando en el segundo sumando con: $\int_0^1 |\ominus\,(x,t)|^2$,

recordando: $\Phi(t) = \int_0^1 (U_t^2 + \eta U_x^2 + \ominus^2)dx$ y

Usando: $\int_0^t \quad \leq \int_0^T \qquad \forall t \in [0,T]$ en (2.128):

$$\Phi(t) + 2k\int_0^t\int_0^1 \ominus_x^2\, dx \leq 6Ce^{Ct} + 2Ce^{Ct}\Phi(t) + 2Ce^{Ct}\int_0^1 (1-\eta)|U_x(x,t)|^2$$

$$+2Ce^{Ct}\left(\|U_x(x,0)\|_{L^2}^2 + \|U_t(x,0)\|_{L^2}^2\right) + 4Ce^{Ct}C_3\int_0^t \Phi(s)ds$$

$$+4Ce^{Ct}C_3\int_0^T\int_0^1 (1-\eta)|U_x(x,t)|^2 + 4Ce^{Ct}\varepsilon\int_0^t\left(2 + \int_0^1 \ominus_x^2\, dx\right)ds \dots\dots..(2.129)$$

Hacemos: $M = max\{6Ce^{Ct}, 2Ce^{Ct}(1-\eta)\|U_x(x,0)\|_{L^2}^2,$

$$2Ce^{Ct}\left(\|U_x(x,0)\|_{L^2}^2 + \|U_t(x,0)\|_{L^2}^2\right), 4Ce^{Ct}C_3(1-\eta)\int_0^T \|U_x(x,t)\|_{L^2}^2\Big\}$$

$$\boldsymbol{\Phi(t) + 2k \int_0^t \int_0^1 \ominus_x^2 \, dx \leq 4M + 2Ce^{Ct}\Phi(t) + 4CC_3e^{Ct} \int_0^t \Phi(s)ds}$$

$$\boldsymbol{+4Ce^{Ct}\varepsilon \int_0^t \left(2 + \int_0^1 \ominus_x^2 \, dx\right) ds \ldots \ldots . . (2.130)}$$

■

Entonces:

$$(1 - 2Ce^{Ct})\Phi(t) + (2k - 4Ce^{Ct}\varepsilon) \int_0^t \int_0^1 \ominus_x^2 \, dx$$

$$\leq 4CC_3e^{Ct} \int_0^t \Phi(s)ds + (4M + 8Ce^{Ct}\varepsilon t) \ldots \ldots \ldots \ldots . . (2.131)$$

Ahora, sean $\varepsilon \ y \ t_0$ lo suficientemente pequeño, entonces existe $\lambda > 0$ de tal manera que:

$$(1 - 2Ce^{Ct_0}) \geq \lambda \ \longrightarrow \ 1 - \lambda \geq 2Ce^{Ct_0} \, ,$$

$$(2k - 4Ce^{Ct_0}\varepsilon) \geq 0 \ \longrightarrow k \geq 2Ce^{Ct_0}\varepsilon$$

Así obtenemos:

$$\lambda\Phi(t) \leq 4CC_3e^{Ct} \int_0^t \Phi(s)ds + (4M + 8Ce^{Ct}\varepsilon t) \ , \qquad t \in [0, t_0] \ldots \ldots \ldots \ldots . . (2.132)$$

Haciendo $C_5 = max\left\{\frac{1}{\lambda} 4CC_3e^{Ct}, \frac{1}{\lambda}(4M + 8Ce^{Ct}\varepsilon t)\right\}$ y

usando la desigualdad de Gronwall's en (2.132):

$$\Phi(t) \leq C_5e^{C_5t} \, , \qquad t \in [0, t_0] \ldots \ldots \ldots \ldots . . (2.133)$$

Luego de (2.133):

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\Phi(t) \leq C_5 \int_0^t \frac{d}{dt}e^{C_5t}$$

Entonces:

$$\Phi(t) - \Phi(0) \leq C_5(e^{C_5t} - 1)$$

Entonces:

$$U_t^2(x,t) + \eta U_x^2(x,t) + \ominus^2 (x,t) - \left(U_t^2(x,0) + \eta U_x^2(x,0) + \ominus^2 (x,0)\right)$$

$$\leq C_5(e^{C_5t} - 1) \ldots \ldots \ldots \ldots (2.134)$$

Como $C_5(e^{C_5t} - 1) \geq 0$, en (2.134):

$$\eta\|(u^1 - u^2)_x\|^2 + \|u_t^1 - u_t^2\|^2 + \|\theta^1 - \theta^2\|^2$$

$$\leq C_6(\eta\|(u_0^1 - u_0^2)_x\|^2 + \|u_1^1 - u_1^2\|^2 + \|\theta_0^1 - \theta_0^2\|^2) \ , \qquad t \in [0, t_0] \ldots \ldots (2.135)$$

Donde:

$$\frac{C_5(e^{C_5t} - 1)}{(\eta\|(u_0^1 - u_0^2)_x\|^2 + \|u_1^1 - u_1^2\|^2 + \|\theta_0^1 - \theta_0^2\|^2)} + 1 \leq C_6$$

Haciendo: $k_1 = min\{\eta, 1\}$ y

$k_2 = max\{\eta, 1\}$

En (2.135):

$$k_1(\|(u^1-u^2)_x\|^2+\|u_t^1-u_t^2\|^2+\|\theta^1-\theta^2\|^2)$$
$$\leq C_6k_2(\|(u_0^1-u_0^2)_x\|^2+\|u_1^1-u_1^2\|^2+\|\theta_0^1-\theta_0^2\|^2), \qquad t\in[0,t_0]\ldots\ldots(2.136)$$

Haciendo: $\tilde{C}=\frac{C_6k_2}{k_1}$ y

Repitiendo el procedimiento anterior paso a paso, se obtiene:

$$\boldsymbol{\left\|(u^1-u^2)_x\right\|^2+\left\|u_t^1-u_t^2\right\|^2+\left\|\theta^1-\theta^2\right\|^2}$$
$$\boldsymbol{\leq \tilde{C}\left(\left\|\left(u_0^1-u_0^2\right)_x\right\|^2+\left\|u_1^1-u_1^2\right\|^2+\left\|\theta_0^1-\theta_0^2\right\|^2\right), \qquad t\in[0,T]\ldots\ldots(2.137)}$$

Para cualquier $\boldsymbol{T>0}$.

■

La unicidad de la solución fuerte de (1)- (6) es obtenido por (2.137).

Por tanto se concluye la prueba del **Teorema 2.1.**

■■

Observación 1: De la prueba, vemos que la constante $\tilde{C}$ en (2.2) depende solo de T y el lado derecho de (2.1) solo depende de T y la norma de $\|(u_0,u_1,\theta_0)\|_{H^1xL^2xL^2}$. Aquí f y g son independientes de t solo por simplicidad.

Observación 2: del **Teorema 2.1**, tenemos:

$$[(u(1,t)-\alpha)^+]\leq C\text{ },para\text{ } t\in[0,T]\text{ },$$

$$\int_0^T[(u(1,t)-\alpha)^+]^\ell|u_t(1,t)|^2dt\leq C\text{ },$$

y usamos en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 3

EXISTENCIA DE SOLUCION DEBIL PARA UN PROBLEMA DE CONTACTO TERMO-ELASTICO SEMILINEAL

3. Existencia de la Solución débil para el sistema (1)-(6):

Demostraremos la existencia de la solución débil para el problema de Contacto Termo elástico Semilineal dado por (1)-(6) bajo condiciones (7)-(8).

<u>Teorema</u> 3.1: Dados $f,\ g \in L^2(0,1),\ \alpha > 0$. Supongamos que $N_1(u,\theta)\ y\ \ N_2(u,\theta)$ Satisfacen las condiciones (7), (8) y que $(u_0,u_1,\theta_0) \in K_0 \times L^2(0,1) \times L^2(0,1)$, entonces para cualquier $T > 0$, el sistema (1)-(6) tiene al menos una solución (u,θ) satisfaciendo:

$$u \in L^\infty(0,T;K_0)\quad ,\quad u_t \in L^\infty\big(0,T;L^2(0,1)\big)$$

$$\theta \in L^\infty\big(0,T;L^2(0,1)\big) \cap L^2\big(0,T;H^1(0,1)\big)\,,$$

donde $K_0 = \{u\colon\ u \in H^1(0,1)\,,\ u(0) = 0\}$.

<u>Demostración</u>:

Usaremos la técnica de regularización para probar la existencia de solución débil para el sistema $(1) - (6)$. Primero, regularizamos los datos iniciales, es decir tal que ellos existen.

$(u_0,u_1,\theta_0) \in K_0 \times L^2 \times L^2 \Longrightarrow$ Por el teorema 2.1 $\exists\ (u_0^n,u_1^n,\theta_0^n) \in H^2 \times H^1 \times H^2$ que son compatibles con las condiciones de frontera $(4) - (6)$.

Por inmersión: $H^2 \hookrightarrow K_0$ con $\|\,.\,\|_{H^1}$

$$H^1 \hookrightarrow L^2 \quad \text{con } \|\,.\,\|_{L^2}$$
$$H^2 \hookrightarrow L^2 \quad \text{con } \|\,.\,\|_{L^2}$$

Esto es: $u_0^n \longrightarrow u_0$ cuando $n \to \infty$ en $\|\,.\,\|_{H^1}$

$u_1^n \longrightarrow u_1$ cuando $n \to \infty$ en $\|\,.\,\|_{L^2}$

$\theta_0^n \longrightarrow \theta_0$ cuando $n \to \infty$ en $\|\,.\,\|_{L^2}$

Es decir,

$$\|u_0^n - u_0\|_{H^1(0,1)} \longrightarrow 0, \|u_1^n - u_1\|_{L^2(0,1)} \longrightarrow 0, \|\theta_0^n - \theta_0\|_{L^2(0,1)} \longrightarrow 0, cuando \;\; n \longrightarrow \infty \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(3.1)$$

Entonces tenemos la sucesión regularizada (u^n, u_t^n, θ^n) la solución para (1) – (6) con valor inicial $(u_0^n, u_1^n, \theta_0^n)$ por teorema 2.1.

De (2.1):

$$E(t; u^n, \theta^n) + \int_0^T \int_0^1 |\theta_x^n|^2 \, dxdt + \int_0^T |\theta^n(1,t)|^2 +$$
$$\int_0^T [(u^n(1,t) - \alpha)^+]^l \, |u_t^n(1,t)|^2 dt \le C\left(\int_0^1 (|f|^2 + |g|^2)dx + E(0; u^n, \theta^n)\right) \ldots.(3.2)$$

Donde:

$$E(t; u^n, \theta^n) = \int_0^1 \left(|u_t^n|^2 + \eta |u_x^n|^2 + |\theta^n|^2 + 2\int_0^{u^n} N_{11}(s)ds\right)dx +$$
$$+\frac{2d}{\mu+1}[(u^n(1,t) - \alpha)^+]^{\mu+1}.$$
$$E(0; u^n, \theta^n) = \int_0^1 \left(|u_1^n(x)|^2 + \eta |u_x^n(x,0)|^2 + |\theta_0^n(x)|^2 + 2\int_0^{u_0^n} N_{11}(s)ds\right)dx$$
$$+\frac{2d}{\mu+1}[(u^n(1,0) - \alpha)^+]^{\mu+1}.$$

$E(0; u^n, \theta^n) < \infty$ (cte.)

$f, g \in L^2(0,1)$ entonces $\|f\|_2, \|g\|_2 < \infty$.

$u_0 \in K_0, \|u_{0x}\| < \infty$.

Entonces, de (3.2):

$$E(t; u^n, \theta^n) + \int_0^T \int_0^1 |\theta_x^n|^2 \, dxdt + \int_0^T |\theta^n(1,t)|^2 +$$
$$\int_0^T [(u^n(1,t) - \alpha)^+]^l \, |u_t^n(1,t)|^2 dt \le C \ldots\ldots\ldots..(3.3)$$

De (3.3) y definición de $E(t; u^n, \theta^n)$:

$$\begin{cases} \int_0^1 \eta |u_x^n(x,t)|^2 dx \leq C, \\ \int_0^1 |u_t^n(x,t)|^2 dx \leq C, \\ \int_0^1 |\theta^n(x,t)|^2 dx \leq C \end{cases}$$

Esto equivale:

$$\begin{cases} \|u^n(t)\|_{H^1} \leq C \\ \|u_t^n(t)\|_{L^2} \leq C \\ \|\theta^n(t)\|_{L^2} \leq C \end{cases} \qquad (3.4)$$

Tomando supremo esencial en $]0,T[$ a (3.4) tenemos:

$$\begin{cases} \underset{t\in]0,T[}{Sup\ ess} \|u^n(t)\|_{H^1} \leq C \\ \underset{t\in]0,T[}{Sup\ ess} \|u_t^n(t)\|_{L^2} \leq C \\ \underset{t\in]0,T[}{Sup\ ess} \|\theta^n(t)\|_{L^2} \leq C \end{cases}$$

Esto equivale:

$$\begin{cases} \|u^n\|_{L^\infty(0,T;H^1)} \leq C \\ \|u_t^n\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq C \\ \|\theta^n\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq C \end{cases}$$

Es decir:

$$\begin{cases} (u^n) \text{ está acotada en } L^\infty(0,T;H^1) \\ (u_t^n) \text{ está acotada en } L^\infty(0,T;L^2) \\ (\theta^n) \text{ está acotada en } L^\infty(0,T;L^2) \end{cases} \qquad (3.5)$$

Por el teorema de Alouglu- Bourbaki en (3.5), se tiene que existe una subsucesiòn de (u^n, u_t^n, θ^n) que la seguiremos denotando por (u^n, u_t^n, θ^n),

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0,T;K_0), \text{ tal que } u^n \rightharpoonup u \quad debil -* \quad en \quad L^\infty(0,T;K_0) \hookrightarrow L^\infty(0,T;H^1) \quad (3.6) \\ u_t \in L^\infty\big(0,T;L^2(0,1)\big), \text{ tal que } u_t^n \rightharpoonup u_t \quad debil -* \quad en \quad L^\infty\big(0,T;L^2(0,1)\big) \quad (3.7) \\ \theta \in L^\infty\big(0,T;L^2(0,1)\big), \text{ tal que } \theta^n \rightharpoonup \theta \quad debil -* \quad en \quad L^\infty\big(0,T;L^2(0,1)\big) \quad (3.8) \end{cases}$$

<u>**Afirmación 1:**</u>

$$\boldsymbol{\theta_t^n \rightharpoonup \theta_t \ \ debilmente \quad en \quad L^2\big(0,T;H^{-1}(0,1)\big)}$$

En efecto:

Considerando (3.8) que,

$$\theta^n \rightharpoonup \theta \quad debil -* \quad en \quad L^\infty\big(0,T;L^2(0,1)\big)$$

Entonces:

$$\int_0^T \theta^n \omega dt \longrightarrow \int_0^T \theta\omega dt \quad \forall\omega \in L^1\big(0,T;L^2(0,1)\big)$$

En particular para $\omega \in L^2\big(0,T;\underbrace{L^2(0,1)}_{\text{regular}}\big) = L^2(Q)$

Luego

Entonces
$$\theta^n \longrightarrow \theta \quad c.s. \quad en\ Q$$
$$\theta_t^n \longrightarrow \theta_t \quad c.s. \quad en\ Q$$

$$\int_Q (\theta_t^n,\omega)_{L^2(Q)}dt \longrightarrow \int_Q (\theta_t,\omega)_{L^2(Q)}dt \quad \omega \in L^2(Q) = L^2\big(0,T;L^2(0,1)\big)$$

$\theta_t^n \longrightarrow \theta_t$ débil en $L^2\big(0,T;L^2(0,1)\big)$ … … … (3.9)

Por inmersión: $L^2(0,1) \approx [L^2(0,1)]' \hookrightarrow H^{-1}(0,1)$ … … … … (3.10)

De (3.10) en (3.9):

$\theta_t^n \longrightarrow \theta_t$ débil en $L^2\big(0,T;H^{-1}(0,1)\big)$ ■

Afirmación 2:

$$\boldsymbol{\theta^n(1,t) \rightharpoonup \theta(1,t) \quad debilmente\ en\ L^2(0,T)}$$

En efecto:

De (3.3):

$$\int_0^T |\theta^n(1,t)|^2 dt \le C$$

Existe una subsucesión tal que:

$\theta^n(1,t) \rightharpoonup \theta(1,t)$ débil en $L^2(0,T)$ ■

De (3.3):

$$\int_0^T [(u^n(1,t)-\alpha)^+]^l\, |u_t^n(1,t)|^2 dt \le C$$

Y como $\int_0^1 |u_t^n(x,t)|^2 dx \le C_2$, entonces

$$\int_0^T [(u^n(1,t)-\alpha)^+]^l \le C \text{ … … … ….} (3.11)$$

Entonces, existe una subsucesión tal que

$(u^n(1,t)-\alpha)^+ \rightharpoonup \chi$ débil en $\underbrace{L^p(0,T),\ \forall\, 1 < p < \infty}_{\equiv L^l(0,T),\ \forall\, 1<l<\infty}$

De (3.7) se tiene que

$$\int_0^T \langle u_t^n(t),\omega\rangle dt \longrightarrow \int_0^T \langle u_t(t),\omega\rangle dt\,, \quad \forall\omega \in L^1\big(0,T;L^2(0,1)\big)$$

Como $L^1\big(0,T;L^2(0,1)\big) \hookrightarrow L^1\big(0,T;H^{-1}(0,1)\big)$

En particular para $\omega \in L^2\big(0,T;H^{-1}(0,1)\big)$

$$\int_0^T \langle u_t^n(t),\omega\rangle_2 dt \longrightarrow \int_0^T \langle u_t(t),\omega\rangle_2 dt\,,\quad \forall\omega \in L^2\big(0,T;H^{-1}(0,1)\big)$$

Entonces:

$$\boldsymbol{u_t^n \rightharpoonup u_t} \ \textbf{débil en}\ \boldsymbol{L^2\Big(0,T;H^{-1}(0,1)\Big)} \dots\dots(3.12)$$

De (3.6), (3.12) y lema 1.5 (preliminar):

Para $\alpha = -1,\ \beta = 1\ y\ r = 0$

$$u^n \longrightarrow u \ \text{ en }\ C\big([0,T];L^2(0,1)\big) \text{ cuando } n \longrightarrow \infty$$

Por lo tanto

$$u^n \longrightarrow u \quad \text{c.s. en } (0,1)\times[0,T] \dots\dots\dots\dots(3.13)$$

De donde

$$(u^n(1,t)-\alpha)^+ \longrightarrow (u(1,t)-\alpha)^+ \ \text{ cuando } n \longrightarrow \infty \ \text{ c.s. en } (0,T) \dots\dots\dots\dots(3.14)$$

De observación 2 y (3.11):

$$\int_0^T |[(u^n(1,t)-\alpha)^+]^\mu|^p \le K \ \ (acotado\ en\ L^p(0,T) \dots\dots\dots(3.15)$$

$$(Entonces, [(u^n(1,t)-\alpha)^+]^\mu \rightharpoonup \chi_1 \ debil\ en\ \ L^p(0,T),\ 1<p<\infty)$$

De (3.14):

$$[(u^n(1,t)-\alpha)^+]^\mu \ \longrightarrow \ [(u(1,t)-\alpha)^+]^\mu \ \ c.s.\ en\ \ (0,T) \dots\dots\dots(3.16)$$

De (3.15), (3.16) y lema 1.4 (preliminar) obtenemos:

$$\boldsymbol{[(u^n(1,t)-\alpha)^+]^\mu \ \rightharpoonup \ [(u(1,t)-\alpha)^+]^\mu \ \ debil\ en\ \ L^p(0,T)}, \forall 1<p<\infty \dots(3.17)$$

<u>**Afirmación 3:**</u>

La Convergencia débil de $\boldsymbol{[(u^n(1,t)-\alpha)^+]^l u_t^n(1,t)}$

En efecto:

$$\frac{d}{dt}[(u^n(1,t)-\alpha)^+]^{l+1} = (l+1)[(u^n(1,t)-\alpha)^+]^l u_t^n(1,t)$$

$$\int_0^T \left|\frac{d}{dt}[(u^n(1,t)-\alpha)^+]^{l+1}\right|^2 dt = \int_0^T |(l+1)[(u^n(1,t)-\alpha)^+]^l u_t^n(1,t)|^2 dt$$

$$\le (l+1)^2 \int_0^T [(u^n(1,t)-\alpha)^+]^{2l} |u_t^n(1,t)|^2 dt \dots\dots\dots\dots\dots(3.18)$$

Usando observación 2 y teorema 2.1, en (3.18):

$$\frac{d}{dt}[(u^n(1,t)-\alpha)^+]^{l+1} \le K \ \ acotado\ en\ L^p(0,T)$$

y además:

$$\frac{d}{dt}[(u^n(1,t)-\alpha)^+]^{l+1} \rightharpoonup \chi_2 \ \ en \ \ L^2(0,T) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T) \ldots\ldots\ldots\ldots (3.19)$$

$$\text{y en } \ \mathcal{D}'(0,T)$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty}\int_o^T \frac{d}{dt}[(u^n(1,t)-\alpha)^+]^{l+1} v dt = \int_0^T \chi_2 v dt\,, \quad \forall\, v \in \mathcal{D}(0,T) = C_0^\infty(0,T)$$

Por otro lado, por definición de derivada en el sentido distribucional:

$$\int_o^T \frac{d}{dt}[(u^n(1,t)-\alpha)^+]^{l+1} v dt = -\int_0^T [(u^n(1,t)-\alpha)^+]^{l+1}\, v_t dt$$

Usando argumentos similares para obtener (3.17), obtenemos:

$$\boldsymbol{[(u^n(1,t)-\alpha)^+]^{l+1} \rightharpoonup [(u(1,t)-\alpha)^+]^{l+1}} \ \ \textbf{en} \ \ \boldsymbol{L^p(0,T),\ 1<p<\infty}$$

$$\boldsymbol{\hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T)}$$

En efecto:

De (3.13) :

$u^n \longrightarrow u$ c.s. en $(0,1)\times[0,T]$

y de (3.14):

$$(u^n(1,t)-\alpha)^+ \rightharpoonup (u(1,t)-\alpha)^+ \ \text{ cuando } n \longrightarrow \infty \ \ c.s. \ \ \ en \ \ (0,T)$$

De observación y (3.11):

$$\int_0^T |[(u^n(1,t)-\alpha)^+]^{l+1}|^p dt \le C \qquad (acotado\ en\ L^p(0,T))$$

Entonces $\|[(u^n(1,t)-\alpha)^+]^{l+1}\|_{L^p(0,T)} \le C \ldots\ldots\ldots\ldots (3.20)$

Siguiendo de (3.14):

$$[(u^n(1,t)-\alpha)^+]^{l+1} \rightharpoonup [(u(1,t)-\alpha)^+]^{l+1} \ \ c.s. \ \ en \ \ (0,T) \ldots\ldots (3.21)$$

De (3.20), (3.21) y Lema 1.4 (preliminar), obtenemos:

$$[(u^n(1,t)-\alpha)^+]^{l+1} \rightharpoonup [(u(1,t)-\alpha)^+]^{l+1} \ debil\ en\ L^p(0,T)\ \forall p \in (1,\infty)$$

$$\hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T) \qquad \blacksquare$$

De (3.21), para $v, v_t \in \mathcal{D}(0,T)$:

$$\int_0^T [(u^n(1,t)-\alpha)^+]^{l+1} v_t dt \rightharpoonup \int_0^T [(u(1,t)-\alpha)^+]^{l+1}\, v_t dt$$

$$-\int_0^T [(u^n(1,t)-\alpha)^+]^{l+1} v_t dt \rightharpoonup -\int_0^T [(u(1,t)-\alpha)^+]^{l+1}\, v_t dt$$

$$\int_0^T \frac{d}{dt}[(u^n(1,t)-\alpha)^+]^{l+1} v dt \rightharpoonup \int_0^T \frac{d}{dt}[(u(1,t)-\alpha)^+]^{l+1}\, v dt \ldots\ldots (3.22)$$

Por (3.19), (3.22) y unicidad de límite distribucional:

$\chi_2 = \frac{d}{dt}[(u(1,t)-\alpha)^+]^{l+1}\ en\,\mathcal{D}'(0,T)$

Siguiendo (3.19):

$$\frac{d}{dt}[(u^n(1,t)-\alpha)^+]^{l+1} \rightharpoonup \frac{d}{dt}[(u(1,t)-\alpha)^+]^{l+1}\ \ en\ \ L^2(0,T)$$

Luego:

$$(l+1)[(u^n(1,t)-\alpha)^+]^l u_t^n(1,t) \rightharpoonup (l+1)[(u(1,t)-\alpha)^+]^l u_t(1,t), en\ \ L^2(0,T)$$

Entonces:

$$[(\boldsymbol{u^n(1,t)-\alpha})^+]^{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{u_t^n(1,t)} \rightharpoonup [(\boldsymbol{u(1,t)-\alpha})^+]^{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{u_t(1,t)}, \boldsymbol{debil\ en\ \ L^2(0,T)} \ \ldots. (3.23)$$

Afirmación 4:

$\boldsymbol{N_{11}(u^n)\ \ \rightharpoonup\ \ N_{11}(u)\ \ debil-*\ en\ \ L^\infty(0,T;L^p(0,1)),\ \ p\in(1,\infty)}$

En efecto:

De (9): $\quad |N_{11}(u^n)| \le M_0|u^n|$

Entonces:

$$\int_0^1 |N_{11}(u^n)|^p \le \int_0^1 M_0^p|u^n|^p = M_0^p\|u^n\|_{L^p}^p$$

y, por ello,

$$\|N_{11}(u^n)\|_{L^p}^p \le C$$

Tomando supremo esencial en $]0,T[$ se obtiene,

$$\underset{t\in\ ]0,T[}{Sup\ ess}\ \|N_{11}(u^n)\|_{L^p}^p \le C$$

por tanto,

$$\|N_{11}(u^n)\|_{L^\infty(0,T;L^p)} \le C$$

es decir,

$\big(N_{11}(u^n)\big)$ esta acotada en $L^\infty(0,T;L^p)$.

Luego, por el teorema de Alouglu- Bourbaki se tiene, que existe una subsucesion de $\big(N_{11}(u^n)\big)$ que la seguiremos denotando por $\big(N_{11}(u^n)\big)$, $N_{11}(u)\in L^\infty(0,T;L^p)$ tal que

$$N_{11}(u^n) \rightharpoonup N_{11}(u)\ \ debil-*\ \ en\ \ L^\infty\big(0,T;L^p(0,1)\big), \qquad p\in(1,\infty)$$

De la misma forma se demuestra que,

$$\boldsymbol{N_{21}(u^n) \rightharpoonup N_{21}(u)\ \ debil-*\ \ en\ \ L^\infty(0,T;L^p(0,1)),\ \ 1<p<\infty.}\ \blacksquare$$

De (3.8):

$$\theta^n \rightharpoonup \theta \quad debil -* \quad en \quad L^\infty\big(0,T;L^2(0,1)\big)$$

De afirmación 1:

$$\theta_t^n \longrightarrow \theta_t \text{ débilmente en } L^2\big(0,T;H^{-1}(0,1)\big)$$

y Lema 1.5 (preliminar), se tiene,

$$\theta^n \longrightarrow \theta \ \ en\ C\big([0,T];H^{-\nu}(0,1)\big), 0<\nu<1 \text{ ò } C\big([0,T];H^{-\nu}(0,1)\big), -1<\nu<0$$

y, por tanto, cuando $n \longrightarrow \infty$ tenemos

$$\left|\int_0^1 (\,\theta^n-\theta)\xi dx\right| \longrightarrow 0, \forall \xi \in H^\nu(0,1).$$

Acerca de $N_{12}(\theta^n)$, por (7) y (2.1), tenemos

$$N_{12}(\theta^n) \rightharpoonup \chi_3 \quad debil -* \quad en \quad L^\infty\big(0,T;L^2(0,1)\big)\ cuando\ n \longrightarrow \infty \ldots\ldots (3.24)$$

Dado $0 \le N_{12}' \le M_1$ y por (2.22):

$0 \le N_{12}(\theta^n) \le M_1\theta^n$ y $0 \le N_{12}(\theta) \le M_1\theta$

Entonces,

$$\left|\int_0^1 \big(N_{12}(\theta^n)-N_{12}(\theta)\big)\zeta dx\right| \le \left|\int_0^1 (M_1\theta^n - M_1\theta)\zeta dx\right|$$

$$= M_1\left|\int_0^1 (\theta^n-\theta)\zeta dx\right| \longrightarrow 0$$

Cuando $n \longrightarrow \infty$. Donde ζ esta entre $\theta^n\ y\ \theta$. Por la unicidad de límite y (3.24), concluimos,

$$\boldsymbol{N_{12}(\theta^n) \rightharpoonup N_{12}(\theta)\ \ debil -* \ \ en \ \ L^\infty\big(0,T;L^2(0,1)\big)\ cuando\ n \longrightarrow \infty \ldots.(3.25)}$$

Para $N_{22}(\theta^n)$, de (8) y (2.1):

$$N_{22}(\theta) \in C_b'(\mathbb{R}) \quad y \quad N'_{22}(\theta) \ge 0 \ ;$$

Nosotros sabemos

$$N_{22}(\theta^n) \rightharpoonup \chi_4 \quad debil -* \quad en \quad L^\infty\big(0,T;L^2(0,1)\big)\ cuando\ n \longrightarrow \infty.$$

Afirmación 5:

Usando el método de la monotonía [24] se obtiene, $\boldsymbol{N_{22}(\theta^n) \rightharpoonup N_{22}(\theta)}$.

En efecto:

Notemos que,

$$X^n = \int_0^T \int_0^1 (N_{22}(\theta^n) - N_{22}(v), \theta^n - v)dxdt \ge 0$$

$$\forall v \in L^2\big(0,T;H^1(0,1)\big) \cap L^\infty\big(0,T;L^2(0,1)\big)$$

y,

$$\int_0^T\int_0^1 N_{22}(\theta^n)\theta^n dxdt = -\int_0^T\int_0^1 \theta_t^n\theta^n dxdt + k\int_0^T\int_0^1 \theta_{xx}^n\theta^n dxdt$$

$$-m\int_0^T\int_0^1 u_{xt}^n\theta^n dxdt - \int_0^T\int_0^1 N_{21}(u^n)\theta^n dxdt + \int_0^T\int_0^1 g\theta^n dxdt \ldots. (3.26)$$

Como

$$\int_0^T\int_0^1 \theta_t^n\theta^n dxdt = \int_0^1 \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}|\theta^n|^2 dtdx = \frac{1}{2}\int_0^1 (|\theta^n(T)|^2 - |\theta^n(0)|^2)\, dx$$

………………**(3.27)**

También

$$k\int_0^T\int_0^1 \theta_{xx}^n\theta^n dxdt = k\int_0^T \left(\theta_x^n\theta^n\Big|_0^1\right) dt - k\int_0^T\int_0^1 |\theta_x^n|^2 dxdt$$

$$= \int_0^T k\big(\theta_x^n(1,t)\theta^n(1,t) - \theta_x^n(0,t)\theta^n(0,t)\big)dt - k\int_0^T\int_0^1 |\theta_x^n|^2 \ldots\ldots (3.28)$$

utilizando las condiciones fronteras (5) y (6) en (3.28) , sigue que

$$k\int_0^T\int_0^1 \theta_{xx}^n\theta^n dxdt = -\int_0^T \beta|\theta^n(1,t)|^2\, dt - k\int_0^T\int_0^1 |\theta_x^n|^2 \ldots\ldots (\mathbf{3.29})$$

y

$$m\int_0^T\int_0^1 u_{xt}^n\theta^n dxdt = m\int_0^T \left(u_t^n\theta^n\Big|_0^1\right) dt - m\int_0^T\int_0^1 u_t^n\theta_x^n dxdt$$

$$= \int_0^T m\big(u_t^n(1,t)\theta^n(1,t) - u_t^n(0,t)\theta^n(0,t)\big)dt - m\int_0^T\int_0^1 u_t^n\theta_x^n \ldots\ldots (3.30)$$

utilizando la condición frontera (6) en (3.30) , sigue que

$$m\int_0^T\int_0^1 u_{xt}^n\theta^n dxdt = \int_0^T m\, u_t^n(1,t)\theta^n(1,t)dt - m\int_0^T\int_0^1 u_t^n\theta_x^n \ldots\ldots (\mathbf{3.31})$$

Luego reemplazando (3.27), (3.29) y (3.31) en (3.26), obtenemos

$$\int_0^T\int_0^1 N_{22}(\theta^n)\theta^n dxdt = -\frac{1}{2}\int_0^1 |\theta^n(T)|^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 |\theta^n(0)|^2\, dx$$

$$-\int_0^T \beta|\theta^n(1,t)|^2\, dt - k\int_0^T\int_0^1 |\theta_x^n|^2 - m\int_0^T u_t^n(1,t)\theta^n(1,t)dt$$

$$+m\int_0^T\int_0^1 u_t^n\theta_x^n - \int_0^T\int_0^1 N_{21}(u^n)\theta^n dxdt + \int_0^T\int_0^1 g\theta^n dxdt$$

Usando la semicontinuidad inferior de la norma, tenemos

$$\int_0^1 |\theta(T)|^2 dx \le \lim_{n\to\infty} inf \int_0^1 |\theta^n(T)|^2 dx,$$

$$\beta\int_0^T |\theta(1,t)|^2 dt \leq \lim_{n\to\infty} inf \beta \int_0^T |\theta^n(1,t)|^2 dt,$$

$$k\int_0^T\int_0^1 |\theta_x|^2 dxdt \ \leq \lim_{n\to\infty} inf\ k \int_0^T\int_0^1 |\theta_x^n|^2\, dxdt,$$

Y desde que N_{21} es una función continua y de Lipschitz , tenemos

$$N_{21}(u^n) \ \rightharpoonup \ N_{21}(u) \ \ (cuando\ n \to \infty) \ \ en \ \ C\big([0,T]\,, H^{\nu}(0,1)\big), \quad 0 < \nu < 1$$

Por consiguiente:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\int_0^1 N_{21}(u^n)\theta^n dxdt = \int_0^T\int_0^1 N_{21}(u)\theta dxdt$$

Y de (3.13): $u^n \longrightarrow u$ c.s. en $(0,1)\times[0,T]$, tenemos

$u^n \rightharpoonup u$ (cuando $n \longrightarrow \infty$) en $C\big([0,T]\,, L^2(0,1)\big)$

Por consiguiente:

$$m\lim_{n\to\infty}\int_0^T\int_0^1 u_t^n\theta_x^n dxdt = m\int_0^T\int_0^1 u_t\theta_x dxdt$$

De la misma forma:

$$m\lim_{n\to\infty}\int_0^T u_t^n(1,t)\theta^n(1,t)dt = m\int_0^T u_t(1,t)\theta_x(1,t)dt$$

De todo lo anterior, tenemos

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\sup X^n \leq \frac{1}{2}\int_0^1 |\theta|^2 - \frac{1}{2}\int_0^1 |\theta(T)|^2 + \int_0^T\int_0^1 g\theta dxdt$$

$$-\int_0^T\int_0^1 N_{21}(u)\theta dxdt - \beta|\theta(1,t)|^2 - k\int_0^T\int_0^1 |\theta_x|^2\, dxdt$$

$$-m\int_0^T u_t(1,t)\theta_x(1,t)dt + m\int_0^T\int_0^1 u_t\theta_x dxdt$$

$$+\int_0^T\int_0^1 N_{22}(v)v dxdt - \int_0^T\int_0^1 N_{22}(v)\theta dxdt - \int_0^T\int_0^1 \chi_4 v dxdt\,,$$

Lo que implica que

$$\int_0^T\int_0^1 \big(\chi_4 - N_{22}(v)\big)(\theta - v)dxdt \geq 0\ .$$

Por la monotocidad de N_{22} , obtenemos

$$\chi_4 = N_{22}(\theta)$$

Dejando que $n \to \infty$ en el siguiente sistema aproximado:

$$u_{tt}^n - \eta u_{xx}^n + m\theta_x^n + N_1(u^n, \theta^n) = f(x) \;\; en \;\; (0,1) \times (0,T)$$

$$\theta_t^n - k\theta_{xx}^n + m u_{xt}^n + N_2(u^n, \theta^n) = g(x) \;\; en \;\; (0,1) \times (0,T)$$

$$u^n(x,0) = u_0^n(x) \;, \;\; u_1^n(x,0) = u_1^n(x) \;, \;\; \theta^n(x,0) = \theta_0^n(x) \,,$$

$$\eta u_x^n(1,t) - m\theta^n(1,t) = -d[(u^n(1,t) - \alpha)^+]^\mu - b[(u^n(1,t) - \alpha)^+]^l u_t^n(1,t) \,,$$

$$k\theta_x^n(1,t) = -\beta\theta^n(1,t) \;,$$
$$u^n(0,t) = 0 \;, \;\; \theta_x^n(0,t) = 0 \;.$$

Obtenemos que $(1) - (6)$ se mantiene en el sentido débil y (u, θ) satisface las propiedades de regularidad en el teorema (3.1), por lo que se demuestra la existencia de la solución débil $(1) - (6)$, es decir la prueba del teorema (3.1) está completa. ■■

CAPITULO 4

DECAIMIENTO EXPONENCIAL

4. Decaimiento exponencial de la solución débil de (1)-(6):

En esta parte, probaremos el decaimiento exponencial de la solución débil en $H^1(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1)$ con $f = g = 0$.

1º obtendremos el decaimiento exponencial de la solución fuerte para$(1) - (6)$ en $H^1(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1)$ cuando $f = g = 0$.

2º entonces por la semicontinuidad inferior, obtenemos el decaimiento exponencial de la solución débil para $(1) - (6)$ en $H^1(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1)$.

<u>Teorema</u> 4.1:bajo la condición del **Teorema 2.1**,$(9) - (10)$, $l = \mu - 1$, $\mu \geq 1$ y M_1, M_2 son lo suficientemente pequeños y $f = g = 0$, tenemos

$$\eta\|u_x\|^2 + \|u_t\|^2 + \|\theta\|^2 \leq Ce^{-\gamma t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.1)$$

γ es una constante positiva .

<u>Prueba</u>

Por **Teorema 2.1,** se sabe que hay una única solución fuerte$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u_t}, \boldsymbol{\theta})$ para$(1) - (6)$.

Desde que $f = g = 0$, por lo que (2.20) se puede escribir como:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E(t; u, \theta) + k\int_0^1 |\theta_x|^2 dx + b[(u(1,t) - \alpha)^+]^\ell |u_t(1,t)|^2 + \beta|\theta(1,t)|^2$$

$$= -\int_0^1 N_{12}(\theta)u_t dx - \int_0^1 N_{21}(u)\theta dx - \int_0^1 N_{22}(\theta)\theta dx \quad \ldots\ldots\ldots. (4.2)$$

Para obtener el decaimiento exponencial, necesitamos el siguiente Lema.

<u>Lema</u> 4.2: bajo las condiciones de $(7) - (10)$, existen dos constante positivas $0 < \delta < 1$ y M_4 satisfaciendo

$$\frac{2}{m}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi u_t dx \leq \int_0^1 \left(\left(\delta + \frac{8M_2^2}{m^2}\right)u_x^2 - u_t^2\right) dx + \delta u_x^2(1,t) + M_4\int_0^1 (\theta^2 + \theta_x^2)\, dx$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (4.3)$$

Donde $\psi(x,t) = \int_0^x \theta(y,t)dy$.

Prueba

Integrando (2) de 0 a x, obtenemos:

$$\int_0^x \theta_t dx - k\int_0^x \theta_{xx} dx + m\int_0^x u_{xt} dx + \int_0^x N_2(u,\theta)dx = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.4)$$

Usando que: $k\int_0^x \theta_{xx}dx = k\,\theta_x(x,t)|_0^x$

y que: $m\int_0^x u_{xt} = mu_t(x,t)|_0^x$

en (4.4):

$$\partial_t \int_0^x \theta dx - k\big(\theta_x(x,t) - \theta_x(0,t)\big) + m\big(u_t(x,t) - u_t(0,t)\big) + \int_0^x N_2(u,\theta)dx = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \quad (4.5)$$

De (6): $u(0,t) = 0 \longrightarrow u_t(0,t) = 0$, $\theta_x(0,t) = 0$

Reemplazando en (4.5):

$$\boldsymbol{\partial_t\psi - k\theta_x + mu_t + \int_0^x N_2(u,\theta)dx = 0} \ldots\ldots (4.6)$$

Multiplicando por u_t a la ecuación (4.6):

$$\psi_t u_t = k\theta_x u_t - mu_t^2 - u_t\int_0^x N_2(u,\theta)dx \ldots\ldots (4.7)$$

También, multiplicando a (1) por ψ

$$\psi u_{tt} = \eta\psi u_{xx} - m\psi\theta_x - \psi N_1(u,\theta) \;\ldots\ldots\ldots. (4.8)$$

Integrando (4.8) de 0 a 1 obtenemos:

$$\int_0^1 \psi\, u_{tt}dx = \eta\int_0^1 \psi\, u_{xx}dx - m\int_0^1 \psi\,\theta_x\,dx - \int_0^1 \psi\, N_1(u,\theta)dx \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.9)$$

Por otro lado:

$$\boldsymbol{\frac{2}{m}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi u_t dx = \frac{2}{m}\int_0^1 (\psi_t u_t + \psi u_{tt})dx} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.10)$$

Reemplazando (4.7) y (4.9) en (4.10):

$$\frac{2}{m}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi u_t dx$$
$$= \frac{2}{m}\int_0^1 \left(k\theta_x u_t - mu_t^2 - u_t\int_0^x N_2(u,\theta)dx + \eta\psi u_{xx} - m\psi\theta_x - \psi N_1(u,\theta)\right)dx$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.11)$$

Integrando por partes $\int_0^1 \psi\, u_{xx}dx$:

$w = \psi(x,t) \longrightarrow dw = \psi_x(x,t)dx = \theta(x,t)dx$; pues $\psi(x,t) = \int_0^x \theta(y,t)dy$.

$dv = u_{xx}(x,t) \longrightarrow v = u_x(x,t)$ y $\psi(0,t) = 0$

Entonces:

$$\int_0^1 \psi(x,t)u_{xx}(x,t)dx = \psi(x,t)u_x(x,t)\Big|_0^1 - \int_0^1 \theta(x,t)u_x(x,t)dx$$

$$= \psi(1,t)u_x(1,t) - \psi(0,t)u_x(0,t) - \int_0^1 \theta(x,t)u_x(x,t)dx$$

$$= \psi(1,t)u_x(1,t) - \int_0^1 \theta(x,t)u_x(x,t)dx$$

Luego:

$$\eta\int_0^1 \psi u_{xx}dx = \eta\psi(1,t)u_x(1,t) - \eta\int_0^1 \theta u_x dx \;\ldots\ldots\ldots.(4.12)$$

Reemplazando (4.12) en (4.11):

$$\boldsymbol{\frac{2}{m}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi u_t dx = 2\int_0^1\left(\frac{k}{m}\theta_x u_t - u_t^2 - \frac{\eta}{m}\theta u_x - \psi\theta_x\right)dx + \frac{2\eta}{m}\psi(1,t)u_x(1,t)}$$

$$\boldsymbol{-\frac{2}{m}\int_0^1 u_t\int_0^x N_2(u,\theta)dx - \frac{2}{m}\int_0^1 \psi N_1(u,\theta)dx} \;\ldots\ldots\ldots\ldots.\boldsymbol{(4.13)}$$

Además tenemos:

1) Usando la desigualdad triangular observamos que:

$$2\frac{k}{m}\int_0^1 \theta_x u_t\,dx \le 2\int_0^1\left|\frac{\mathbf{2}k}{m}\theta_x\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}u_t\right|dx \;\ldots\ldots\ldots\ldots(4.14)$$

Usando la desigualdad $2|ab| \le |a|^2 + |b|^2$ en (4.14):

$$2\frac{k}{m}\int_0^1 \theta_x u_t\,dx \le \frac{4k^2}{m^2}\int_0^1 \theta_x^2 dx + \frac{1}{4}\int_0^1 |u_t|^2 dx \;\ldots\ldots..\boldsymbol{(4.15)}$$

2) Usando la desigualdad triangular observamos que:

$$-2\frac{\eta}{m}\int_0^1 \theta u_x\,dx \le 2\int_0^1\left|\frac{\sqrt{\mathbf{2}}\eta}{m\sqrt{\boldsymbol{\delta}}}\theta\frac{\sqrt{\boldsymbol{\delta}}}{\sqrt{\mathbf{2}}}u_x\right|dx \;\ldots\ldots\ldots\ldots(4.16)$$

Usando la desigualdad $2|ab| \le |a|^2 + |b|^2$ en (4.16):

$$-2\frac{\eta}{m}\int_0^1 \theta u_x\,dx \le \frac{2\eta^2}{m^2\delta}\int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\delta}{2}\int_0^1 u_x^2 dx \;\ldots\ldots..\boldsymbol{(4.17)}$$

3) Usando la desigualdad triangular observamos que:

$$-2\int_0^1 \psi\theta_x\,dx \le 2\int_0^1 |\psi\theta_x|\,dx = 2\int_0^1 |\psi||\theta_x|dx \;\ldots\ldots\ldots\ldots(4.18)$$

Usando la desigualdad $2|ab| \le |a|^2 + |b|^2$

y $\psi(x,t) = \int_0^x \theta(y,t)dy \longrightarrow |\psi| \le \int_0^x|\theta| \le x.|\theta|$

$= 1.|\theta| = \theta$ pues $0 \le x \le 1$

en (4.18):

$$-2\int_0^1 \psi\theta_x\,dx \le \int_0^1 \theta^2\,dx + \int_0^1 \theta_x^2\,dx \;\ldots\ldots\ldots\ldots\boldsymbol{(4.19)}$$

4) Usando la desigualdad triangular observamos que:

$$2\frac{\eta}{m}\psi(1,t)u_x(1,t) \leq 2\left|\frac{\eta}{\sqrt{\boldsymbol{\delta}}m}\psi(1,t)\sqrt{\boldsymbol{\delta}}u_x(1,t)\right| \ldots\ldots\ldots\ldots(4.20)$$

Usando la desigualdad $2|ab| \leq |a|^2 + |b|^2$

y $\psi(x,t) = \int_0^x \theta(y,t)dy \longrightarrow |\psi| \leq \int_0^x |\theta| \leq x.|\theta|$

$= 1.|\theta| = \theta$ pues $0 \leq x \leq 1$

en (4.20):

$$2\frac{\eta}{m}\psi(1,t)u_x(1,t) \leq \frac{\eta^2}{\delta m^2}\int_0^1 \theta^2 dx + \delta u_x^2(1,t) \ldots\ldots\ldots\ldots(\mathbf{4.21})$$

5) Usando la desigualdad triangular observamos que:

$$-\frac{2}{m}\int_0^1 u_t \int_0^x N_2(u,\theta)dsdx \leq \frac{2}{m}\int_0^1 \left|u_t\left(\int_0^x N_2(u,\theta)ds\right)\right| dx$$

$$= \frac{2}{m}\int_0^1 |u_t| \left|\int_0^x N_2(u,\theta)ds\right| dx$$

$$\leq \frac{2}{m}\int_0^1 |u_t| \int_0^x |N_2(u,\theta)|\, dsdx \leq \frac{2}{m}\int_0^1 |u_t|(x.|N_2(u,\theta)|)dx$$

$$\leq \frac{2}{m}\int_0^1 |u_t|(1.|N_2(u,\theta)|)dx = \frac{2}{m}\int_0^1 |u_t||N_2(u,\theta)|dx \ldots\ldots\ldots\ldots(4.22)$$

pues $0 \leq x \leq 1$

Usando (8): $N_2(u,\theta) = N_{21}(u) + N_{22}(\theta)$,

(10): $|N_{21}(u)| \leq M_2|u|$, $|N_{22}(\theta)| \leq M_3|\theta|$,

la desigualdad $2|ab| \leq |a|^2 + |b|^2$,

y el **Lema 2.2:** $\int_0^1 |u(x)|^2\, dx \leq 4\int_0^1 |u_x|^2 dx$ en (4.22):

$$-\frac{2}{m}\int_0^1 u_t \int_0^x N_2(u,\theta)dsdx \leq \frac{2}{m}\int_0^1 |u_t|(|N_{21}(u)| + |N_{22}(\theta)|)\, dx$$

$$\leq \frac{2}{m}\int_0^1 |u_t|(M_2|u| + M_3|\theta|)\, dx$$

$$= 2\int_0^1 |u_t|\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{m}M_2|u|dx + 2\int_0^1 \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}|u_t|\frac{\mathbf{2}}{m}M_3|\theta|dx$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^1 |u_t|^2 + \frac{2M_2^2}{m^2}\int_0^1 |u|^2 + \frac{1}{4}\int_0^1 |u_t|^2 + \frac{4M_3^2}{m^2}\int_0^1 \theta^2$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^1 |u_t|^2 + \frac{2M_2^2}{m^2}4\int_0^1 |u_x|^2 + \frac{1}{4}\int_0^1 |u_t|^2 + \frac{4M_3^2}{m^2}\int_0^1 \theta^2$$

$$\leq \frac{3}{4}\int_0^1 |u_t|^2 + \frac{8M_2^2}{m^2}\int_0^1 |u_x|^2 + \frac{4M_3^2}{m^2}\int_0^1 \theta^2 \ldots\ldots\ldots.\ (\mathbf{4.23})$$

6) Usando la desigualdad triangular observamos que:

$$-\frac{2}{m}\int_0^1 \psi N_1(u,\theta)dx \leq \frac{2}{m}\int_0^1 |\psi N_1(u,\theta)| = \frac{2}{m}\int_0^1 |\psi||N_1(u,\theta)| \dots\dots \quad (4.24)$$

Usando $\psi(x,t) = \int_0^x \theta(y,t)dy$ entonces $|\psi| \leq \int_0^x |\theta| \leq x.|\theta|$
$\leq 1.|\theta| = \theta$ pues $0 \leq x \leq 1$

(7): $N_1(u,\theta) = N_{11}(u) + N_{12}(\theta)$,
(9): $|N_{11}(u)| \leq M_0|u|$,
(2.22): $0 \leq N_{12}(\theta) \leq M_1\theta$ entonces $|N_{12}(\theta)| \leq M_1|\theta|$,
la desigualdad $2|ab| \leq |a|^2 + |b|^2$
y el **Lema 2.2:** $\int_0^1 |u(x)|^2\, dx \leq 4\int_0^1 |u_x|^2 dx$ en (4.24):

$$-\frac{2}{m}\int_0^1 \psi N_1(u,\theta)dx \leq \frac{2}{m}\int_0^1 |\theta|(|N_{11}(u)| + |N_{12}(\theta)|)dx$$

$$\leq \frac{2}{m}\int_0^1 |\theta|(M_0|u| + M_1|\theta|)\, dx$$

$$= 2\int_0^1 \frac{\sqrt{\boldsymbol{8}}}{\sqrt{\boldsymbol{\delta}}}\frac{M_0}{m}|\theta|\frac{\sqrt{\boldsymbol{\delta}}}{\sqrt{\boldsymbol{8}}}|u|dx + \frac{2}{m}\int_0^1 |\theta|M_1|\theta|dx$$

$$\leq \frac{8M_0^2}{\delta m^2}\int_0^1 |\theta|^2 dx + \frac{\delta}{8}\int_0^1 |u|^2 dx + \frac{2M_1}{m}\int_0^1 |\theta|^2 dx$$

$$\leq \left(\frac{8M_0^2}{\delta m^2} + \frac{2M_1}{m}\right)\int_0^1 |\theta|^2 dx + \frac{\delta}{2}\int_0^1 |u_x|^2 dx \dots\dots\dots \quad (\mathbf{4.25})$$

Remplazando $(4.15), (4.17), (4.19), (4.21), (4.23)\ y\ (4.25)\ en\ (4.13)$:

$$\frac{2}{m}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi u_t dx \leq \frac{4k^2}{m^2}\int_0^1 \theta_x^2 dx + \frac{1}{4}\int_0^1 |u_t|^2 dx - 2\int_0^1 u_t^2$$
$$+ \frac{2\eta^2}{m^2\delta}\int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\delta}{2}\int_0^1 u_x^2 dx + \int_0^1 \theta^2\, dx + \int_0^1 \theta_x^2\, dx$$
$$+ \frac{\eta^2}{\delta m^2}\int_0^1 \theta^2 dx + \delta u_x^2(1,t) + \frac{3}{4}\int_0^1 |u_t|^2 + \frac{8M_2^2}{m^2}\int_0^1 |u_x|^2 + \frac{4M_3^2}{m^2}\int_0^1 \theta^2$$
$$+ \left(\frac{8M_0^2}{\delta m^2} + \frac{2M_1}{m}\right)\int_0^1 |\theta|^2 dx + \frac{\delta}{2}\int_0^1 |u_x|^2 dx \dots\dots\dots..(4.26)$$

Simplificando (4.26):

$$\frac{2}{m}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi u_t dx \leq \int_0^1 \left(\left(\delta + \frac{8M_2^2}{m^2}\right)u_x^2 - u_t^2\right)dx + \delta u_x^2(1,t)$$
$$+ \left(\frac{2\eta^2}{m^2\delta} + 1 + \frac{\eta^2}{\delta m^2} + \frac{4M_3^2}{m^2} + \frac{8M_0^2}{\delta m^2} + \frac{2M_1}{m}\right)\int_0^1 \theta^2 dx + \left(\frac{4k^2}{m^2} + 1\right)\int_0^1 \theta_x^2\, dx \dots (4.27)$$

Haciendo $M_4 = max\left\{\left(\frac{2\eta^2}{m^2\delta} + 1 + \frac{\eta^2}{\delta m^2} + \frac{4M_3^2}{m^2} + \frac{8M_0^2}{\delta m^2} + \frac{2M_1}{m}\right), \left(\frac{4k^2}{m^2} + 1\right)\right\}$ en (4.27)

$$\frac{2}{m}\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi u_t dx \leq \int_0^1 \left(\left(\delta + \frac{8M_2^2}{m^2}\right)u_x^2 - u_t^2\right)dx + \delta u_x^2(1,t)$$
$$+M_4\left(\int_0^1 (\theta^2 + \theta_x^2)dx\right) \ldots (4.28)$$

Luego el **Lema 4.2** está demostrado ■

Afirmación 1:

$$-\frac{d}{dt}\int_0^1 x u_t u_x dx \leq -\frac{1}{2}\left(u_t^2(1,t)+u_x^2(1,t)\right) + C$$
$$+M_5\int_0^1 u_x^2 + \frac{m}{2}\int_0^1 \theta_x^2 + \frac{M_1}{2}\int_0^1 \theta^2$$

Donde $M_5 = \frac{m}{2} + \frac{5M_0}{2} + \frac{M_1}{2}$

En efecto:

de la ecuación (1):

$$u_{tt} - \eta u_{xx} + m\theta_x + N_1(u,\theta) = 0$$

Se tiene:

$$u_{tt} - \eta u_{xx} = -m\theta_x - N_1(u,\theta) \ \ldots\ldots\ldots..(4.29)$$

Aplicando el **Lema 2.3** a la ecuación(4.29):

$$-\frac{d}{dt}\int_0^1 x u_t u_x dx = -\frac{x}{2}\left(u_t^2(x,t)+u_x^2(x,t)\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 x'(u_t^2+\eta u_x^2)\,dx$$
$$-\int_0^1 x u_x\left(-m\theta_x - N_1(u,\theta)\right)dx \ \ldots\ldots\ldots\ldots(4.30)$$

Usando (7): $N_1(u,\theta) = N_{11}(u) + N_{12}(\theta)$ en (4.30) :

$$-\frac{d}{dt}\int_0^1 x u_t u_x dx = -\frac{1}{2}\left(u_t^2(1,t)+u_x^2(1,t)\right) + \frac{1}{2}\int_0^1 (u_t^2+\eta u_x^2)\,dx$$
$$+\int_0^1 x u_x m\theta_x + \int_0^1 x u_x\left(N_{11}(u) + N_{12}(\theta)\right)dx \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4.31)$$

Usando $0 \leq x \leq 1$

y la desigualdad triangular en (4.31) :

$$-\frac{d}{dt}\int_0^1 x u_t u_x dx \leq -\frac{1}{2}\left(u_t^2(1,t)+u_x^2(1,t)\right) + \frac{1}{2}\int_0^1 (u_t^2+\eta u_x^2)\,dx$$
$$+m\int_0^1 |u_x||\theta_x| + \int_0^1 |u_x||N_{11}(u) + N_{12}(\theta)|\,dx \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4.32)$$

Usando la ecuación (9) $|N_{11}(u)| \leq M_0|u|$,

la ecuación (2.22) $0 \leq N_{12}(\theta) \leq M_1\theta \longrightarrow |N_{12}(\theta)| \leq M_1|\theta|$

y la desigualdad $2|a||b| \leq |a|^2 + |b|^2$en (4.32):

$$-\frac{d}{dt}\int_0^1 x u_t u_x dx \leq -\frac{1}{2}\left(u_t^2(1,t)+u_x^2(1,t)\right) + \frac{1}{2}\int_0^1 (u_t^2+\eta u_x^2)\,dx$$
$$+\frac{m}{2}\int_0^1 u_x^2 + \frac{m}{2}\int_0^1 \theta_x^2 + \frac{M_0}{2}\int_0^1 u_x^2 + \frac{M_0}{2}\int_0^1 u^2 + \frac{M_1}{2}\int_0^1 u_x^2 + \frac{M_1}{2}\int_0^1 \theta^2 \ \ldots\ldots\ldots\ (4.33)$$

Usando el **Lema 2.2**

y agrupando en (4.33):

$$-\frac{d}{dt}\int_0^1 xu_tu_xdx \leq -\frac{1}{2}\left(u_t^2(1,t)+u_x^2(1,t)\right)+\frac{1}{2}\int_0^1 (u_t^2+\eta u_x^2)\,dx$$

$$+\left(\frac{m}{2}+\frac{M_0}{2}+2M_0+\frac{M_1}{2}\right)\int_0^1 u_x^2+\frac{m}{2}\int_0^1 \theta_x^2+\frac{M_1}{2}\int_0^1 \theta^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(4.34)$$

Haciendo $\boldsymbol{M_5=\frac{m}{2}+\frac{5M_0}{2}+\frac{M_1}{2}}$

y como $E(t;u,\theta)=\int_0^1\left(|u_t|^2+\eta|u_x|^2+|\theta|^2+2\int_0^u N_{11}(s)ds\right)dx+$

$$+\frac{2d}{\mu+1}[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}$$

implica $\boldsymbol{\frac{1}{2}\int_0^1\left(u_t^2+\eta u_x^2\right)dx\leq\frac{1}{2}E(t;u,\theta)\leq C}$ por (2.1)

en (4.34):

$$-\frac{d}{dt}\int_0^1 xu_tu_xdx \leq -\frac{1}{2}\left(u_t^2(1,t)+u_x^2(1,t)\right)+C$$

$$+M_5\int_0^1 u_x^2+\frac{m}{2}\int_0^1 \theta_x^2+\frac{M_1}{2}\int_0^1 \theta^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(4.35) \qquad \blacksquare$$

<u>Afirmación 2:</u>

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\int_0^1 u.u_tdx \leq \int_0^1\left(u_t^2-\frac{\eta}{2}u_x^2+\frac{m^2+4M_1^2}{\eta}\theta^2\right)dx}$$

$$\boldsymbol{-\frac{b}{\mu+1}\frac{d}{dt}[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}-\int_0^1 N_{11}(u).udx-d[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}}$$

En efecto:

Multiplicando la ecuación (1) por u e integrando de 0 a 1:

$$\int_0^1 u.u_{tt}-\int_0^1 \eta u.u_{xx}+\int_0^1 mu.\theta_x+\int_0^1 u.N_1(u,\theta)=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.36)$$

Usando $\frac{d}{dt}\int_0^1 u.u_tdx=\int_0^1 u_t^2dx+\int_0^1 u.u_{tt}\,dx$,

Integración por partes de $\eta\int_0^1 u.u_{xx}dx=\eta u.u_x\Big|_0^1-\int_0^1 \eta u_x^2dx$,

Integración por partes de $m\int_0^1 u.\theta_xdx=mu.\theta\Big|_0^1-\int_0^1 m\theta u_xdx$

y ordenando en (4.36):

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 u.u_tdx=\int_0^1 u_t^2dx-\int_0^1 \eta u_x^2dx+\int_0^1 m\theta u_xdx$$

$$+\eta u(1,t)u_x(1,t)-mu(1,t)\theta(1,t)-\int_0^1 N_1(u,\theta).udx \ldots\ldots\ldots (4.37)$$

Usando la condición frontera (4) en (4.37):

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 u.u_tdx=\int_0^1 u_t^2dx-\int_0^1 \eta u_x^2dx+\int_0^1 m\theta u_xdx-\int_0^1 N_1(u,\theta).udx$$

$$-d[(u(1,t)-\alpha)^+]^\mu u(1,t)-bu_t(1,t)[(u(1,t)-\alpha)^+]^l u(1,t)\ \ldots\ldots..(4.38)$$

De **Observación 2:** $[(u(1,t)-\alpha)^+]\le C \quad (C = cte\ positiva)$ para $t\in[0,T]$
Es decir $u(1,t)$ es positivo ya que α es positivo, **entonces $u_t(1,t)$ es positivo**
Luego:

$$-bu_t(1,t)[(u(1,t)-\alpha)^+]^l u(1,t)\le -bu_t(1,t)[(u(1,t)-\alpha)^+]^l(u(1,t)-\alpha)$$
$$\ldots\ldots..(4.39)$$

Reemplazando (4.39) en (4.38):

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\int_0^1 u.u_t dx\le\int_0^1\left(u_t^2-\eta u_x^2+m\theta u_x\right)dx-\int_0^1 N_1(u,\theta).udx}$$
$$\boldsymbol{-d[(u(1,t)-\alpha)^+]^\mu u(1,t)-bu_t(1,t)[(u(1,t)-\alpha)^+]^{l+1}}\ \ldots\ldots..\boldsymbol{(4.40)}$$

Usando desigualdad triangular,

$N_1(u,\theta)=N_{11}(u)+N_{12}(\theta)$,
Por (2.22): $0\le N_{12}(\theta)\le M_1\theta\longrightarrow|N_{12}(\theta)|\le M_1|\theta|$ y
Similar a (4.39): $-d[(u(1,t)-\alpha)^+]^\mu u(1,t)\le -d[(u(1,t)-\alpha)^+]^\mu(u(1,t)-\alpha)$,
en (4.40):

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 u.u_t dx\le\int_0^1(u_t^2-\eta u_x^2)dx+\frac{1}{2}\int_0^1 2m\frac{\boldsymbol{\sqrt{2}}}{\boldsymbol{\sqrt{\eta}}}|\theta|\frac{\boldsymbol{\sqrt{\eta}}}{\boldsymbol{\sqrt{2}}}|u_x|dx-\int_0^1 N_{11}(u).udx$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1 2\frac{\boldsymbol{\sqrt{8}}}{\boldsymbol{\sqrt{\eta}}}M_1|\theta|\frac{\boldsymbol{\sqrt{\eta}}}{\boldsymbol{\sqrt{8}}}|u|dx-d[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}$$
$$-bu_t(1,t)[(u(1,t)-\alpha)^+]^{l+1}\ \ldots\ldots..(4.41)$$

Usando la desigualdad $2|a||b|\le|a|^2+|b|^2$,
y $l=\mu-1$ en (4.41):

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 u.u_t dx\le\int_0^1(u_t^2-\eta u_x^2)dx+\frac{1}{2}\int_0^1 m^2\frac{2}{\eta}|\theta|^2+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\eta}{2}|u_x|^2dx$$
$$-\int_0^1 N_{11}(u).udx\ +\frac{1}{2}\int_0^1\frac{8}{\eta}M_1^2|\theta|^2dx+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\eta}{8}|u|^2dx-d[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}$$
$$-bu_t(1,t)[(u(1,t)-\alpha)^+]^\mu\ \ldots\ldots..(4.42)$$

Usando derivada,

Lema 2.2: $\int_0^1|u|^2\le 4\int_0^1|u_x|^2$
y ordenando en (4.42):

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 u.u_t dx\le\int_0^1\left(u_t^2-\frac{\eta}{2}u_x^2+\frac{m^2+4M_1^2}{\eta}\theta^2\right)dx$$
$$-\frac{b}{\mu+1}\frac{d}{dt}[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}-\int_0^1 N_{11}(u).udx$$
$$-d[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}\ \ldots.\ldots...(4.43) \qquad \blacksquare$$

<u>Afirmación 3:</u>

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\int_0^1\left(\frac{2(1+\eta)}{m}\psi u_t-\frac{\eta}{4M_5}xu_tu_x+u.u_t+\frac{b}{\mu+1}[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}\right)dx}$$

$$\boldsymbol{+\int_0^1\left(\eta u_t^2+\frac{\eta}{8}u_x^2\right)dx+C_{10}+\int_0^1 N_{11}(u).udx}$$

$$\boldsymbol{+d[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}\leq M_6\int_0^1(\theta_x^2+\theta^2)\,dx}$$

Donde $\boldsymbol{M_6=max\left\{(1+\eta)M_4+\frac{\eta}{4M_5}\frac{M_1}{2}+\frac{m^2+4M_1^2}{\eta}\,,\frac{\eta}{4M_5}\frac{m}{2}+(1+\eta)M_4\right\}}$

En efecto

Usando (4.28), (4.35) y (4.43) de la forma:

1) Multiplicando $(1+\eta)$ la ecuación (4.28):

$$\frac{2}{m}(1+\eta)\frac{d}{dt}\int_0^1\psi u_t dx\leq(1+\eta)\int_0^1\left(\left(\delta+\frac{8M_2^2}{m^2}\right)u_x^2-u_t^2\right)dx+(1+\eta)\delta u_x^2(1,t)$$

$$+(1+\eta)M_4\int_0^1(\theta^2+\theta_x^2)\,dx\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\mathbf{(4.44)}$$

2) Multiplicando $\left(\frac{\eta}{4M_5}\right)$ la ecuación (4.35):

$$-\frac{\eta}{4M_5}\frac{d}{dt}\int_0^1 xu_tu_x dx\leq-\frac{\eta}{4M_5}\frac{1}{2}\left(u_t^2(1,t)+u_x^2(1,t)\right)+\frac{\eta}{4M_5}C$$

$$+\frac{\eta}{4M_5}M_5\int_0^1 u_x^2+\frac{\eta}{4M_5}\frac{m}{2}\int_0^1\theta_x^2+\frac{\eta}{4M_5}\frac{M_1}{2}\int_0^1\theta^2\ \ldots\ldots\ldots\ldots.\mathbf{(4.45)}$$

3) De (4.43):

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 u.u_t dx+\frac{d}{dt}\int_0^1\frac{b}{\mu+1}[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}dx$$

$$+\int_0^1 N_{11}(u).udx\ +d[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}$$

$$\leq\int_0^1\left(u_t^2-\frac{\eta}{2}u_x^2+\frac{m^2+4M_1^2}{\eta}\theta^2\right)dx\ \ldots\ldots\mathbf{(4.46)}$$

Sumando (4.44), (4.45) y (4.46):

$$\frac{d}{dt}\int_0^1\left(\frac{2(1+\eta)}{m}\psi u_t-\frac{\eta}{4M_5}xu_tu_x+u.u_t+\frac{b}{\mu+1}[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}\right)dx$$

$$-(1+\eta)\int_0^1\left(\left(\delta+\frac{8M_2^2}{m^2}\right)u_x^2-u_t^2\right)dx-(1+\eta)\delta u_x^2(1,t)$$

$$+\frac{\eta}{4M_5}\frac{1}{2}\left(u_t^2(1,t)+u_x^2(1,t)\right)-\frac{\eta}{4M_5}C-\frac{\eta}{4M_5}M_5\int_0^1 u_x^2+\int_0^1 N_{11}(u).udx$$

$$+d[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}-\int_0^1\left(u_t^2-\frac{\eta}{2}u_x^2\right)dx$$

$$\leq (1+\eta)M_4\int_0^1(\theta^2+\theta_x^2)\,dx+\frac{\eta}{4M_5}\frac{m}{2}\int_0^1\theta_x^2+\frac{\eta}{4M_5}\frac{M_1}{2}\int_0^1\theta^2$$

$$+\int_0^1\frac{m^2+4M_1^2}{\eta}\theta^2\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \ (4.47)$$

Ordenando (4.47):

$$\frac{d}{dt}\int_0^1\left(\frac{2(1+\eta)}{m}\psi u_t-\frac{\eta}{4M_5}xu_tu_x+u.u_t+\frac{b}{\mu+1}[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}\right)dx$$

$$+\left(-(1+\eta)\left(\delta+\frac{8M_2^2}{m^2}\right)-\frac{\eta}{4M_5}M_5+\frac{\eta}{2}\right)\int_0^1u_x^2\,dx-(1+\eta)\delta u_x^2(1,t)$$

$$+\frac{\eta}{4M_5}\frac{1}{2}\left(u_t^2(1,t)+u_x^2(1,t)\right)-\frac{\eta}{4M_5}C+\int_0^1N_{11}(u).udx$$

$$+d[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}+\left((1+\eta)-1\right)\int_0^1u_t^2dx$$

$$\leq\left((1+\eta)M_4+\frac{\eta}{4M_5}\frac{M_1}{2}+\frac{m^2+4M_1^2}{\eta}\right)\int_0^1\theta^2\,dx+\left(\frac{\eta}{4M_5}\frac{m}{2}+(1+\eta)M_4\right)\int_0^1\theta_x^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \ (4.48)$$

Por lo tanto dejando que M_2 es lo suficientemente pequeño tal que $-\left[\frac{64M_2^2+8m^2}{7m^2+64M_2^2}\right]\leq\eta$,
Eligiendo $\delta\leq\frac{\eta}{1+\eta}\left[\frac{1}{8}-\frac{8M_2^2}{m^2}\right]-\frac{8M_2^2}{(1+\eta)m^2}$, se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\int_0^1\left(\frac{2(1+\eta)}{m}\psi u_t-\frac{\eta}{4M_5}xu_tu_x+u.u_t+\frac{b}{\mu+1}[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}\right)dx$$

$$+\int_0^1\left(\eta u_t^2+\frac{\eta}{8}u_x^2\right)dx-(1+\eta)\delta u_x^2(1,t)$$

$$+\frac{\eta}{4M_5}\frac{1}{2}\left(u_t^2(1,t)+u_x^2(1,t)\right)-\frac{\eta}{4M_5}C+\int_0^1N_{11}(u).udx$$

$$+d[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}\leq M_6\int_0^1(\theta_x^2+\theta^2)\,dx \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \ (4.49)$$

Donde $M_6=max\left\{(1+\eta)M_4+\frac{\eta}{4M_5}\frac{M_1}{2}+\frac{m^2+4M_1^2}{\eta}\ ,\frac{\eta}{4M_5}\frac{m}{2}+(1+\eta)M_4\right\}$ ■

Recordando (2.81): $\int_0^T\left(u_t^2(1,t)+u_x^2(1,t)\right)dt\leq C_2$ entonces
Usando $u_t^2(1,t)+u_x^2(1,t)\leq C_2$
y $u_x^2(1,t)\leq C_2$ en (4.49):

$$\frac{d}{dt}\int_0^1\left(\frac{2(1+\eta)}{m}\psi u_t-\frac{\eta}{4M_5}xu_tu_x+u.u_t+\frac{b}{\mu+1}[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}\right)dx$$

$$+\int_0^1 \left(\eta u_t^2 + \frac{\eta}{8}u_x^2\right)dx - (1+\eta)\delta C_2$$

$$+\frac{\eta}{4M_5}\frac{1}{2}C_2 - \frac{\eta}{4M_5}C + \int_0^1 N_{11}(u).udx$$

$$+d[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1} \leq M_6\int_0^1 (\theta_x^2 + \theta^2)\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.50)$$

Haciendo $C_{10} = -(1+\eta)\delta C_2 + \frac{\eta}{4M_5}\frac{1}{2}C_2 \; - \frac{\eta}{4M_5}C$ en (4.50):

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\int_0^1 \left(\frac{2(1+\eta)}{m}\psi u_t - \frac{\eta}{4M_5}x u_t u_x + u.u_t + \frac{b}{\mu+1}[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}\right)dx}$$

$$\boldsymbol{+\int_0^1 \left(\eta u_t^2 + \frac{\eta}{8}u_x^2\right)dx + C_{10} + \int_0^1 N_{11}(u).udx}$$

$$\boldsymbol{+d[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1} \leq M_6\int_0^1 (\theta_x^2 + \theta^2)\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.51)}$$

Definamos $\gamma_1 = min\{k,\beta\}$, desde

$$\int_0^1 \theta^2 dx \leq 2\int_0^1 \theta_x^2 dx + 2\theta^2(1,t)$$

En efecto:

Por la desigualdad de Poincare-Freedrichs

$$\int_0^1 \theta^2 dx \leq (1-0)\int_0^1 \theta_x^2 dx = \int_0^1 \theta_x^2 dx \leq 2\int_0^1 \theta_x^2 dx$$

Y como: $2\theta^2(1,t) \geq 0$, entonces:

$$\int_0^1 \theta^2 dx \leq 2\int_0^1 \theta_x^2 dx + 2\theta^2(1,t) \qquad \blacksquare$$

<u>**Afirmación 4:**</u>

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}E(t;u,\theta) + 2k\int_0^1 |\theta_x|^2 dx + 2b\left[(u(1,t)-\alpha)^+\right]^{\ell} |u_t(1,t)|^2 + 2\beta|\theta(1,t)|^2}$$

$$\boldsymbol{-\left(\frac{\gamma_1}{8} + 2M_3\right)\int_0^1 \theta^2 \leq \frac{16M_1^2}{\gamma_1}\int_0^1 u_t^2 + \frac{64M_2^2}{\gamma_1}\int_0^1 u_x^2}$$

En efecto:

De la ecuación (4.2):

$$\frac{d}{dt}E(t;u,\theta) + 2k\int_0^1 |\theta_x|^2 dx + 2b\left[(u(1,t)-\alpha)^+\right]^{\ell} |u_t(1,t)|^2 + 2\beta|\theta(1,t)|^2$$

$$= -2\int_0^1 N_{12}(\theta)u_t dx - 2\int_0^1 N_{21}(u)\theta dx - 2\int_0^1 N_{22}(\theta)\theta dx \ldots\ldots.. \quad (4.52)$$

Usando la desigualdad triangular,

(2.22): $0 \leq |N_{12}(\theta)| \leq M_1|\theta|$,

y (10): $|N_{21}(u)| \leq M_2|u|$, $|N_{22}(\theta)| \leq M_3|\theta|$

en (4.52):

$$\frac{d}{dt}E(t;u,\theta) + 2k\int_0^1 |\theta_x|^2 dx + 2b\left[(u(1,t)-\alpha)^+\right]^{\ell} |u_t(1,t)|^2 + 2\beta|\theta(1,t)|^2$$

$$\leq 2\int_0^1 \frac{\sqrt{\boldsymbol{\gamma_1}}}{\mathbf{4}}|\theta|M_1\frac{\mathbf{4}}{\sqrt{\boldsymbol{\gamma_1}}}|u_t|dx + 2\int_0^1 M_2\frac{\mathbf{4}}{\sqrt{\boldsymbol{\gamma_1}}}|u|\frac{\sqrt{\boldsymbol{\gamma_1}}}{\mathbf{4}}|\theta|dx + 2\int_0^1 M_3|\theta||\theta|dx$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.53)$$

Usando la desigualdad $2|ab| \leq |a|^2 + |b|^2$

y **Lema 2.2**

en (4.53):

$$\frac{d}{dt}E(t;u,\theta) + 2k\int_0^1 |\theta_x|^2 dx + 2b\left[(u(1,t)-\alpha)^+\right]^{\ell} |u_t(1,t)|^2 + 2\beta|\theta(1,t)|^2$$

$$\leq \frac{16M_1^2}{\gamma_1}\int_0^1 u_t^2 + \frac{\gamma_1}{16}\int_0^1 \theta^2 + \frac{64M_2^2}{\gamma_1}\int_0^1 u_x^2 + \frac{\gamma_1}{16}\int_0^1 \theta^2 + 2M_3\int_0^1 \theta^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.54)$$

Ordenando (4.54):

$$\frac{d}{dt}E(t;u,\theta) + 2k\int_0^1 |\theta_x|^2 dx + 2b\left[(u(1,t)-\alpha)^+\right]^{\ell} |u_t(1,t)|^2 + 2\beta|\theta(1,t)|^2$$

$$-\left(\frac{\gamma_1}{8} + 2M_3\right)\int_0^1 \theta^2 \leq \frac{16M_1^2}{\gamma_1}\int_0^1 u_t^2 + \frac{64M_2^2}{\gamma_1}\int_0^1 u_x^2 \;\ldots\ldots\ldots (4.55) \quad \blacksquare$$

Por otro lado integrando la desigualdad (4.50) de 0 a t y observando que:

$$\mathbf{1)}\ \int_0^t \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\int_0^1 \boldsymbol{dxdt} = \int_0^1 \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\int_0^t \boldsymbol{dtdx} \qquad \boldsymbol{y}$$

$$\mathbf{2)}\ \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\int_0^1 \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{\mu}+\mathbf{1}}[(\boldsymbol{u}(\mathbf{1},\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{\alpha})^+]^{\boldsymbol{\mu}+\mathbf{1}} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{\mu}+\mathbf{1}}[(\boldsymbol{u}(\mathbf{1},\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{\alpha})^+]^{\boldsymbol{\mu}+\mathbf{1}}:$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \left(\frac{2(1+\eta)}{m}\psi u_t - \frac{\eta}{4M_5}xu_tu_x + u.u_t\right)dx + \frac{b}{\mu+1}[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}$$

$$+\boldsymbol{NE}(\boldsymbol{t};\boldsymbol{u},\boldsymbol{\theta}) + \int_0^t\int_0^1 \left(\eta u_t^2 + \frac{\eta}{8}u_x^2\right)dxdt + \int_0^t\int_0^1 N_{11}(u).udxdt + \int_0^t C_{10}\,dt$$

$$+\int_0^t d[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}dt \leq M_6\int_0^t\int_0^1 (\theta_x^2 + \theta^2)\,dxdt + \boldsymbol{NE}(\boldsymbol{t};\boldsymbol{u},\boldsymbol{\theta}) \;\ldots\ldots\; (4.56)$$

Donde: $C_{10} = -(1+\eta)\delta C_2 + \frac{\eta}{4M_5}\frac{1}{2}C_2 - \frac{\eta}{4M_5}C$

Ahora de (4.56) definamos:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}(t) = NE(t;u,\theta) + \int_0^1 \left(\frac{2(1+\eta)}{m}\psi u_t - \frac{\eta}{4M_5}x u_t u_x + u.u_t\right)dx}$$

$$\boldsymbol{+\frac{b}{\mu+1}[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \quad (\mathbf{4.57})$$

Escogemos N satisfaciendo:

$$N \geq max\left\{\frac{(1+\eta)}{2m}, \frac{2(1+\eta)}{m} + \frac{\eta}{8M_5} + \frac{1}{2}, \left(\frac{\eta}{8M_5} + 2\right)\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots..(4.58)$$

Usando la desigualdad triangular

y como $0 \leq x \leq 1$ en (4.57):

$$\mathcal{L}(t) \leq \boldsymbol{NE(t;u,\theta)} + \frac{(1+\eta)}{m}2\int_0^1 \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}|\psi|\sqrt{\mathbf{2}}|u_t|dx + \frac{\eta}{8M_5}2\int_0^1 |u_t||u_x|dx$$

$$+\frac{1}{2}2\int_0^1 |u||u_t|\,dx + \frac{b}{\mu+1}[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1} \ldots\ldots\ldots\ldots. \quad (4.59)$$

Usando la desigualdad $2|a.b| \leq |a|^2 + |b|^2$,

y $\psi(x,t) = \int_0^x \theta(y,t)dy \longrightarrow \psi^2(x,t) \leq \left|\int_0^x \theta(y,t)dy\right|^2$

$$\leq \int_0^x \theta^2(y,t)dy$$

$$\leq \int_0^1 \theta^2\,dx \text{ pues } 0 \leq x \leq 1$$

En (4.59):

$$\mathcal{L}(t) \leq \boldsymbol{NE(t;u,\theta)} + \frac{(1+\eta)}{2m}\int_0^1 \theta^2 + \frac{2(1+\eta)}{m}\int_0^1 u_t^2 + \frac{\eta}{8M_5}\left[\int_0^1 u_t^2 + \int_0^1 u_x^2\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\int_0^1 u^2 + \int_0^1 u_t^2\right] + \frac{b}{\mu+1}[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1} \ldots\ldots\ldots\ldots. \quad (4.60)$$

Usando **Lema 2.2**

y ordenando (4.60):

$$\mathcal{L}(t) \leq \boldsymbol{NE(t;u,\theta)} + \frac{(1+\eta)}{2m}\int_0^1 \theta^2 + \left(\frac{2(1+\eta)}{m} + \frac{\eta}{8M_5} + \frac{1}{2}\right)\int_0^1 u_t^2$$

$$+\left(\frac{\eta}{8M_5} + 2\right)\int_0^1 u_x^2 + \frac{b}{\mu+1}[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1} \ldots\ldots\ldots\ldots. \quad (4.61)$$

Usando (4.58) en (4.61):

$$\mathcal{L}(t) \leq \boldsymbol{NE(t;u,\theta)} + N\int_0^1 \theta^2 + N\int_0^1 u_t^2 + N\frac{1}{\eta}\int_0^1 \eta.u_x^2$$

$$+\frac{b}{2d}\frac{2d}{\mu+1}[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1} \ldots\ldots\ldots\ldots. \quad (4.62)$$

Usando $E(t;u,\theta) = \int_0^1 \left(|u_t|^2 + \eta|u_x|^2 + |\theta|^2 + 2\int_0^u N_{11}(s)ds\right)dx$

$$+\frac{2d}{\mu+1}[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}$$

haciendo $C_{11} = max\left\{3N, \frac{N}{\eta}, \frac{b}{2d}\right\}$,

y llamando $M_7 = 3C_{11}$ en (4.62):

$$\mathcal{L}(t) \leq M_7 E(t; u, \theta) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.63)$$

Utilizando la definición de $\mathcal{L}(t)$:

$$M_7^{-1} E(t; u, \theta) \leq \mathcal{L}(t) \ldots\ldots\ldots\ldots (4.64)$$

De (4.63) y (4.64):

$$\boldsymbol{M_7^{-1} E(t; u, \theta) \leq \mathcal{L}(t) \leq M_7 E(t; u, \theta)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(4.65)}$$

Ahora multiplicando (4.55) por N:

$$\frac{d}{dt} NE(t; u, \theta) + 2Nk \int_0^1 |\theta_x|^2 dx + 2Nb\left[(u(1,t)-\alpha)^+\right]^{\ell} |u_t(1,t)|^2 + 2\mathrm{N}\beta|\theta(1,t)|^2$$

$$-N\left(\frac{\gamma_1}{8} + 2M_3\right) \int_0^1 \theta^2 \leq N \frac{16M_1^2}{\gamma_1} \int_0^1 u_t^2 + N \frac{64M_2^2}{\gamma_1} \int_0^1 u_x^2 \quad \ldots\ldots\ldots (4.66)$$

Sumando (4.50) y (4.66):

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \left(\frac{2(1+\eta)}{m} \psi u_t - \frac{\eta}{4M_5} x u_t u_x + u.u_t + \frac{b}{\mu+1}[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}\right) dx$$

$$+ \int_0^1 \left(\eta u_t^2 + \frac{\eta}{8} u_x^2\right) dx + C_{10} + \int_0^1 N_{11}(u).u dx \; + d[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}$$

$$\frac{d}{dt} NE(t; u, \theta) + 2Nk \int_0^1 |\theta_x|^2 dx + 2Nb\left[(u(1,t)-\alpha)^+\right]^{\ell} |u_t(1,t)|^2 + 2N\beta|\theta(1,t)|^2$$

$$-N\left(\frac{\gamma_1}{8} + 2M_3\right) \int_0^1 \theta^2 \leq M_6 \int_0^1 (\theta_x^2 + \theta^2)\, dx + N \frac{16M_1^2}{\gamma_1} \int_0^1 u_t^2 + N \frac{64M_2^2}{\gamma_1} \int_0^1 u_x^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.67)$$

Usando la definición de $\mathcal{L}(t)$

y ordenando (4.67):

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) + C_{10} + 2N\beta|\theta(1,t)|^2 + 2Nk \int_0^1 \theta_x^2 - N\left(\frac{\gamma_1}{8} + 2M_3\right) \int_0^1 \theta^2$$

$$+ \int_0^1 \left(\eta u_t^2 + \frac{\eta}{8} u_x^2\right) dx + 2Nb\left[(u(1,t)-\alpha)^+\right]^{\ell} |u_t(1,t)|^2 + \int_0^1 N_{11}(u).u\, dx$$

$$+d[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1} \leq M_6 \int_0^1 (\theta_x^2 + \theta^2)\, dx + N \frac{16M_1^2}{\gamma_1} \int_0^1 u_t^2 + N \frac{64M_2^2}{\gamma_1} \int_0^1 u_x^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.68)$$

Haciendo $\tau = min\left\{2k, -\left(\frac{\gamma_1}{8} + 2M_3\right)\right\}$

y como $0 \leq C_{10} + 2N\beta|\theta(1,t)|^2$ en (4.68):

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t)+N\tau\int_0^1(\theta_x^2+\theta^2)+\int_0^1\left(\eta u_t^2+\frac{\eta}{8}u_x^2\right)dx+2Nb\left[(u(1,t)-\alpha)^+\right]^{\ell}|u_t(1,t)|^2$$

$$+\int_0^1 N_{11}(u).u\,dx\ +d[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}\le M_6\int_0^1\left(\theta_x^2+\theta^2\right)dx+N\frac{16M_1^2}{\gamma_1}\int_0^1 u_t^2$$

$$+N\frac{64M_2^2}{\gamma_1}\int_0^1 u_x^2 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (4.69)$$

Eligiendo N suficientemente grande, $M_1\ y\ M_2$ suficientemente pequeño tal que:
$N\ge\frac{2M_6}{\tau}$, $M_1^2\le\frac{\eta\gamma_1}{64N}$, $M_2^2\le\frac{\eta\gamma_1}{1024N}$ ……………….. (4.70)

De (4.69):

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t)+N\tau\int_0^1(\theta_x^2+\theta^2)+\int_0^1\left(\eta u_t^2+\frac{\eta}{8}u_x^2\right)dx+\int_0^1 N_{11}(u).u\,dx$$

$$+d[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}\le M_6\int_0^1(\theta_x^2+\theta^2)\,dx+N\frac{16M_1^2}{\gamma_1}\int_0^1 u_t^2+N\frac{64M_2^2}{\gamma_1}\int_0^1 u_x^2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (4.71)$$

De (4.71):

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t)+(N\tau-M_6)\int_0^1(\theta_x^2+\theta^2)dx+\left(\eta-N\frac{16M_1^2}{\gamma_1}\right)\int_0^1 u_t^2dx$$

$$+\left(\frac{\eta}{8}-N\frac{64M_2^2}{\gamma_1}\right)\int_0^1 u_x^2\,dx+\int_0^1 N_{11}(u)u\,dx\ +d\frac{\mu+1}{b}\frac{b}{\mu+1}[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}\le 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (4.72)$$

Haciendo $\rho=min\left\{(N\tau-M_6),\left(\eta-N\frac{16M_1^2}{\gamma_1}\right),\left(\frac{\eta}{8}-N\frac{64M_2^2}{\gamma_1}\right),1,d\frac{\mu+1}{b}\right\}$ en (4.72):

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t)+\rho\left[\int_0^1\left(\theta^2+\theta_x^2+u_t^2+u_x^2+\int_0^u N_{11}(s)ds\right)dx\right.$$

$$\left.+\frac{b}{\mu+1}[(u(1,t)-\alpha)^+]^{\mu+1}\right]\le 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (4.73)$$

De (4.64) y (4.73):

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t)+M_7^{-1}\rho\mathcal{L}(t)\le 0 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (4.74)$$

Integrando de 0 a t (4.74):

$$\mathcal{L}(t)\le\mathcal{L}(0)-M_7^{-1}\rho\int_0^t\mathcal{L}(t)$$

Por la desigualdad de Gronwall, se tiene:

$$\mathcal{L}(t)\le\mathcal{L}(0)e^{-M_7^{-1}\rho\,t}$$

Usando $(4.64)\ y\ (4.65)$ tenemos:

$$E(t;u,\theta) \leq M_7^2 E(0;u,\theta) e^{-M_7^{-1}\rho\, t} \ldots \ldots . .(4.75)$$

Sea $\gamma = M_7^{-1}\rho$ y $C = M_7^2 E(0;u,\theta)$ en (4.75):

$$E(t;u,\theta) \leq Ce^{-\gamma\, t} \ldots \ldots . .(4.76)$$

entonces obtenemos el decaimiento de la solución fuerte ■

Utilizando la semicontinuidad inferior de la norma en $H^1 \times L^2 \times L^2$ y como corolario del **Teorema 4.1** tenemos:

Corolario 4.3: Cuando $f = g = 0$, bajo las condiciones del **Teorema 3.1,** $(9) - (10)$ y $M_1\ y\ M_2$ satisfaciendo (4.69), entonces la solución débil de $(1) - (6)$ decae exponencialmente cuando $t \longrightarrow \infty$, es decir, tenemos:

$$\eta\|u_x\|^2 + \|u_t\|^2 + \|\theta\|^2 \leq Ce^{-\gamma t}$$

Demostración

De (4.76) y definición de la energía:

$$\int_0^1 (|u_t^n|^2 + \eta|u_x^n|^2 + |\theta^n|^2) \leq Ce^{-\gamma\, t} \ldots \ldots (4.77)$$

Usando la semicontinuidad inferior de la norma, obtenemos

$$\int_0^1 |u_t|^2 dx \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} inf \int_0^1 |u_t^n|^2 dx$$

$$\int_0^1 \eta|u_x|^2 dx \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} inf \int_0^1 \eta|u_x^n|^2 dx \qquad (4.78)$$

$$\int_0^1 |\theta|^2 dx \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} inf \int_0^1 |\theta^n|^2 dx$$

De (4.77) y (4.78),

$$\int_0^1 \eta|u_x|^2 dx + \int_0^1 |u_t|^2 dx + \int_0^1 |\theta|^2 dx \leq Ce^{-\gamma\, t}$$

Esto es:

$$\eta\|u_x\|^2 + \|u_t\|^2 + \|\theta\|^2 \leq Ce^{-\gamma t}$$

Entonces obtenemos el decaimiento de la solución débil ■■

Conclusiones

De lo estudiado en el capítulo 2 se concluye que para probar la existencia de la solución fuerte del problema (1)-(6), se usan técnicas multiplicativas, técnicas de la energía que nos permiten probar (2.1) y la dependencia continua (2.2).

Usamos técnicas de regularización, método de monotonicidad, método de la compacidad para mostrar que el sistema (1)-(6) está bien puesto, es decir probamos la existencia de solución débil.

Para el decaimiento exponencial del sistema (1)-(6) utilizamos técnicas multiplicativas.

La producción elaborada por Gao Hongjun y Jaime Muñoz. [21] (2000) es enriquecido por un análisis más rigoroso en la obtención de la existencia y unicidad de solución del sistema (1)-(6).

Los detalles mostrados con sumo cuidado, pueden ser de provecho a otros problemas en E.D.P.

Bibliografía

[1] Adams, R., & Fournier, J. (2003). *Sobolev Spaces.* Vancouver: Elsevier, sedunda edicion.

[2] Aguilar Reyes, F. (setiembre de 2014). Espacios de Lipschitz en espacios de funciones integrables con peso. Huajuapan de Leon, oaxaca, Mexico.

[3] Araruna, F. D. ; Feitosa A. J. R. & Olivera M.L. (2009). Aboundary obstacle problem for the Mindlin-Timoshenko system. Math. Meth Applic. Sci. Vol 32 pp. 738-756.

[4] Blanco Gamarra, J., & Rojas Milla, C. (2014). Espacio de Sobolev. *revista del programa de matematica I Matva*, 77-85.

[5] Blasco De la Cruz, O. (11 de seteiembre de 2014). Analisis Funcional. Valencia, Homònima, España.

[6] Bresìz, H. (1984). *A nalisis Funcional Teoria y Aplicaciones.* Madrid: Alianza Editorial, S.A.

[7] Brezis Häim, (2011). Functional Analysis, Sobolev Space and Partial Differential Equation, Springer, New York.

[8] Copetti M.I.M., Elliot C.M. (1993). A one dimensional quasi-static contact problem in linear thermoelasticity, European J. Appl Math. Vol. N° 4, pp. 151 – 174.

[9] Costa Marques, A. (2018). NOÇÕES DE TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES E UMA INTRODUÇÃO AOS ESPAÇOS DE SOBOLEV. Macapà, Amapà, Brasil.

[10] Carlson, D.E. (1972). Linear thermoelasticity, in: C. Truesdell (Ed.), Handbuch der Physik, Vol. VI a/2, Springer – Verlag, 1972.

[11] Dafermos, C.M. (1968) On the existence and the asymptotic stability of solution to the equations of linear thermoelasticity. Arch. Rational Mech. Anal, 29, 241 – 271.

[12] Dassios, G. and Grillakis M. (1984). Dissipation rates and partition of energy in thermoelasticity. Arch. Rational Mech. Anal. 87, 49 – 91.

[13] Day W.A. (1986). Heat Conductions with in Linear Thermoelasticity, 3rd Edition, Pergamon, Oxford,

[14] Duvaut, G., Lions, J. L. (1972). Les Inéquations on Mécanique et en Physique. Dunod, Paris.

[15] Echandia Liendo, V., & Finol, C. (Octubre de 2002). Notas de Analisis Funcional. Caracas, Venezuela.

[16] Elliott, C.M., & Qi T. (1994). A dynamic contact problem thermoelasticity, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. 23 (7) pp. 883 – 898.

[17] Figueiredo I., Trabucho L. (1995). A class of contact and friction dynamic problems in thermoelasticity and in thermoviscoelasticity, Internat. J. Eng. Sci. 33 pp. 45 – 66.

[18] Gao Hong-jun & Zhao Yu-juan, (2006). Asymptotic behaviour and exponential Stability for thermoelastic problem with localized damping. Applied Mathematics and Mechanics (English Edition), 27 (11): 1557 – 1568.

[19] Gilbert R. P., Shi P. & Shillor M. (1990). A quasistatic contact problem in linear thermoelasticity. Rendiconti di mat 10, pp. 785 – 808.

[20] Hansen S.W. (1992). Exponential energy decay in a linear thermoelastic rod [J], Journal of Mathematical Analysis and applications, 167 (2): pp. 429 – 442.

[21] Gao Hongjun & Jaime Muñoz. (2000) Global existence and decay for the semilinear thermoelastic contact problem J. Differential Equations 186, pp. 52 – 68.

[22] Kesavan, S. (1989). *Topic in Functional Analysis and Applications.* New Delhi-India: Wiley Easrtern Limited.

[23] Kim J.U. (1989). A boundary thin obstacle problem for a wave equation, Comm. Partial Differential Equation 14 (8&9) 1011-1026.

[24] Lions J.L. (1969). Quelques Méthodes de Résolution des Problémes aux Limites Non Linéiares, Dunod Gauthier Villars, Paris, 1969.

[25] Marrero, I. (Diciembre de 2011). Espacios de Hilbert. San Cristobal, Tenerife, España.

[26] Medeiros, L., & Milla miranda, m. (1986). Weak Solutions for a System of non-Linear Klein-Gordon Equation. *Annali di Matematica Pura ed applicata*, Vol 146, p. 173-183.

[27] Medeiros, L., & Milla, M. (2000). *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elìticos não Homogêneos).* Rio de Janeiro: UFRJ. IM, Segunda edicion.

[28] Medeiros, L., & Rivera, P. (1975). *Espaçãos de Sobolev e Diferenciais Parciais.* Rio de Janeiro - R.J.: Instituto de Matemaitca UFRJ.

[29] Milla Miranda, & Medeiros, L. (1987). On the existence of global Solutions of a coupled nonlinear Klein-Gordon Equations. *FunKeeialaj Ekvaciaj*, Vol 30, Nª 1.

[30] Muñoz Rivera, J. (2004). *Distribuiçoes & Equacoes Diferenciais Parciais.* Petropolis Rio de Janeiro: Serie de textos de Pós graduação.

[31] Muñoz Rivera J. & Portillo Oquendo H. (1999). Exponential decay for a contact problem with local damping. Funkcial. Ekvac. 42, no. 3, pp. 371–387.

[32] Muñoz Rivera J, Jiang S. (1998). The thermoelastic and viscoelastic contact of two rods, J. Math. Anal. Appl. 217, pp. 423 – 458.

[33] Nakao M. (1966). Decay of solutions of the wave equation with a local nonlinear dissipation . Mathematische Annalen, 305 (3), pp. 403 – 417.

[34] Ochoa, M. (diciembre de 2010). Problemas de Interpolacion en Espacios de Sobolev. Caracas, Caracas, Venezuela.

[35] Ortiz Chata, J. (29 de Diciembre de 2017). El teorema del Paso de la Montaña de Willen aplicado al problema no lineal de Direchlet. Puno, Puno, Peru.

[36] Portillo Oquendo, H. (1999). Estabilidad para problemas de contacto parcialmente amortecidas y materiales mixtos. Tesis doctorado Inst. Mat. UFRJ, Brasil.

[37] Ramos Castillo, R. (Diciembre de 2018). La Desigualdad de Sobolev. Lima, Lima, Peru.

[38] Sattinger, D. (Octubre de 2004). Measure theory & Integration. New Haven, Connecticut, Estados Unidos.

[39] Schwartz, L. (1950). *Theorie des Distributions.* Paris: Hermann, Tome I.II.

[40] Shi P., Shillor M. (1990) Uniqueness and stability of the solution to a thermoelastic contact problem, European J. Appl. Math. Vol. N° 1 pp. 371 – 387.

[41] Shi P., Shillor M, Zou X. L. (1991). Numerical solution to the one dimensional problems of thermoelastic contact, Comput. Math. Appl. 22 (10) pp. 65 – 78.

[42] Shi P. & Shillor M. (1992). Existence of a solution to the n dimensional problem of thermoelastic contact. Commun. In Partial Diff Equations, 17 (9 & 10), 1597 – 1618.

[43] Shi P., Shillor M. (1993). A quasi-static contact problem in thermoelasticity with a radiation condition for the temperature, J. Math. Anal Appl. 172 147 – 165.

[44] Solis, S. (2016). Origen Topologico de las Distribuciones. *Matematica: Una publicacion del ICM-SPOL*, 85-89.

[45] Vargas, F. (octubre de 1994). Teoria de Distribuciones. Medellin, Antioquia, colombia.

[46] Zuazua, Enrique. (1990). Exponential decay for the semi-linear wave equation with locally distributed damping. Commun PDE, 15, PP 205 – 235.